

ELETTROMAGNETISMO

PARTE II

**PIERO CALDIROLA
MARCELLO FONTANESI
ELIO SINDONI**

MASSON

Milano • Parigi • Barcellona • Bonn

1993

PREFAZIONE

È questa la seconda parte del volume di «Elettromagnetismo» che gli autori hanno tratto dal contenuto dei corsi di Fisica Generale II da essi tenuti negli ultimi anni presso l'Università di Milano. La prima parte del volume, dedicata essenzialmente all'elettrostatica e alla corrente stazionaria, era stata pubblicata nel 1974.

Il nuovo volume inizia con la trattazione della magnetostatica nel vuoto e nei mezzi materiali: se ne espongono le leggi fenomenologiche mostrando poi come le proprietà magnetiche di un corpo macroscopico traggano origine dalle proprietà degli atomi che lo costituiscono. Segue la trattazione del fenomeno dell'induzione elettromagnetica e quella dei circuiti in corrente continua ed alternata.

Infine, partendo dalle leggi fenomenologiche già studiate, si espone la teoria del campo elettromagnetico compendiata nelle equazioni di Maxwell illustrandone alcuni aspetti importanti quali le proprietà delle onde elettromagnetiche in dipendenza anche delle caratteristiche del mezzo in cui esse si propagano. Un particolare accento viene dato, anche per l'interesse tecnico che l'argomento presenta, alla propagazione di tali onde in cavi coassiali e in guide.

L'ultimo capitolo contiene un'esposizione sommaria ma autosufficiente della teoria della relatività ristretta (meccanica ed elettromagnetismo), il cui algoritmo viene semplificato al massimo (evitando fra l'altro l'uso del calcolo tensoriale) ed applicato a problemi concreti di interesse diretto per la fisica sperimentale.

GLI AUTORI

Milano, aprile 1976

INDICE

CAPITOLO 8

MAGNETOSTATICA NEL VUOTO

8.1	Introduzione	1
8.2	Il vettore induzione magnetica B	3
8.3	Forza agente su un circuito percorso da corrente	5
8.4	Coppia agente su un circuito chiuso percorso da corrente	7
8.5	Comportamento di un ago magnetico in un campo magnetico	10
8.6	Moto di un elettrone in un campo magnetico uniforme	13
8.7	Campo generato da un filo rettilineo indefinito percorso da corrente. Legge di Biot e Savart	15
8.8	Prima formula di Laplace e sue applicazioni	17
8.9	Forze agenti tra due circuiti percorsi da corrente	24
8.10	Potenziale scalare magnetico	26
8.11	Legge della circuitazione di Ampère	29
8.12	Il flusso di B	33
8.13	Potenziale vettore magnetico	34
8.14	Potenziale vettore magnetico generato da una spira percorsa da corrente	35

CAPITOLO 9

MAGNETOSTATICA NEI MEZZI MATERIALI

9.1	Introduzione	39
9.2	Correnti atomiche e vettore di magnetizzazione	39
9.3	Correnti di magnetizzazione	41
9.4	Campo magnetico generato da un materiale magnetizzato. Rappresentazione mediante correnti di magnetizzazione	46
9.5	Il vettore H . La legge della circuitazione di Ampère in presenza dei materiali magnetizzati	48
9.6	Le equazioni del campo. Le condizioni al contorno di B ed H	49
9.7	Campo magnetico esterno ad un materiale magnetizzato. Rappresentazione mediante poli magnetici	51

VII

9.8	Campo magnetico interno ad un materiale magnetizzato	53
9.9	La suscettività e la permeabilità magnetica	56
9.10	Materiali ferromagnetici. Ciclo di isteresi	58
9.11	Circuiti magnetici	62
9.12	Magneti permanenti	66

CAPITOLO 10

ORIGINE ATOMICA DELLE PROPRIETÀ MAGNETICHE DI UN MATERIALE

10.1	Introduzione	71
10.2	Campo magnetico molecolare	72
10.3	Origine del diamagnetismo	74
10.4	L'origine del paramagnetismo	80
10.5	Il ferromagnetismo e la legge di Curie-Weiss	82

CAPITOLO 11

L'INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

11.1	Introduzione	89
11.2	La legge dell'induzione elettromagnetica	89
11.3	Flusso tagliato e flusso concatenato	92
11.4	Autoinduttanza	94
11.5	Mutua induttanza	96
11.6	L'energia magnetica	97

CAPITOLO 12

CIRCUITI IN CORRENTE CONTINUA ED ALTERNATA

12.1	Introduzione	101
12.2	Generatori di tensione e di correnti costanti	102
12.3	Le leggi di Kirchhoff	103
12.4	Il metodo delle correnti dei rami	
12.5	Il metodo delle correnti di maglia	106
12.6	Metodo dei nodi	109
12.7	Il teorema di Thevenin	110
12.8	Fenomeni transitori	112
12.9	Correnti alternate	123
12.10	Rappresentazioni mediante vettori ruotanti	126
12.11	Rappresentazione mediante numeri complessi	129
12.12	L'impedenza	131
12.13	Circuito R-L-C in serie	135
12.14	Potenza dissipata nei circuiti a corrente alternata	143

CAPITOLO 13

TEORIA DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO

13.1	Equazioni differenziali di Maxwell	147
13.2	Conservazione dell'energia e vettore di Poynting	152
13.3	Quantità di moto elettromagnetica	153
13.4	Potenziali del campo elettromagnetico	155
13.5	Equazione generale delle onde	158
13.6	Onde piane in un mezzo omogeneo isolante	160
13.7	Onde sinusoidali	165
13.8	Rappresentazione complessa delle onde	168
13.9	Onde piane monocromatiche in un mezzo conduttore	169
13.10	Quantità di moto, energia, intensità di un'onda elettromagnetica	170
13.11	Condizioni al contorno per campi variabili	174
13.12	Riflessione e rifrazione delle onde elettromagnetiche	176
13.13	Cenno alle onde emergenti o convergenti in un punto	179
13.14	Radiazione di una carica in moto accelerato	181

CAPITOLO 14

ONDE ELETTROMAGNETICHE IN CAVI COASSIALI E GUIDE D'ONDA

14.1	Introduzione	187
14.2	Onde in un cavo coassiale	187
14.3	Il cavo coassiale rappresentato mediante elementi concentrati	191
14.4	Guida d'onda rettangolare	196

CAPITOLO 15

CENNI SULLA TEORIA DELLA RELATIVITÀ RISTRETTA

15.1	Relatività della meccanica galileiana	201
15.2	I fenomeni elettromagnetici e l'ipotesi dell'etere	210
15.3	I principi della relatività ristretta	218
15.4	Elettrodinamica Relativistica	244
15.5	Dinamica Relativistica	251
	INDICE ANALITICO	263

8

Magnetostatica nel vuoto

8.1 Introduzione

Risulta certamente difficile poter dire quando e da chi per primo fu osservato il fenomeno dell'attrazione tra due pezzi di materiale ferroso spontaneamente magnetizzati.

Possiamo tuttavia ritenere che questo evento si sia verificato in tempi piuttosto remoti e che abbia senz'altro costituito motivo di sorpresa e fonte di riflessione per gli occasionali sperimentatori, tanto più se consideriamo che su questo argomento anche in epoche recenti le nostre conoscenze erano rimaste estremamente approssimative e pervase più di occultismo che di spirito scientifico.

Già in testi di scrittori greci e latini si rintracciano frequenti accenni alle proprietà presentate da un particolare materiale, da noi attualmente denominato magnetite, e che sappiamo costituito da un ossido ferrico ferroso (Fe_3O_4), di attrarre oggetti di ferro e di trasmettere ad essi, una volta venuti in contatto, lo stesso potere. Il termine magnete, con il quale questo materiale veniva indicato, secondo la leggenda deriverebbe dal nome di un pastore greco, Μῆγης, il quale per caso scoprì che la punta di ferro del suo bastone veniva attirata da alcune rocce. Più probabilmente l'origine di questo nome dovrebbe derivare dal nome di una località. Magnesia, presso la quale furono rinvenuti nell'antichità giacimenti di magnetite.

Benché, come abbiamo accennato, la conoscenza dei fenomeni più appariscenti connessi con i materiali magnetizzati risalga ad epoche lontane nel tempo, tuttavia i primi accenni ad una applicazione pratica del magnetismo si possono ritrovare in Cina, in scritti del XI secolo, ed in Europa in scritti del XII secolo.

Fu infatti proprio nel periodo di poco antecedente alla stesura di queste cronache che la capacità di un ago di materiale magnetizzato ad assumere la direzione sud-nord cominciò a venir utilizzata nella costruzione della bussola ai fini dell'orientamento, soprattutto durante la navigazione. Solo verso la fine del XVI secolo e all'inizio del XVII secolo lo studio dei fenomeni magnetici ha assunto un aspetto sistematico basato su dati sperimentali attendibili. Nel 1600 in particolare William Gilbert riassunse, nel trattato «De Magnete», le conoscenze disponibili al suo tempo sulle interazioni tra magneti. Gilbert, oltre ad offrire con il suo trattato un valido punto di partenza per le speculazioni successive, contribuì in maniera originale allo sviluppo delle teorie sul magnetismo con alcune esperienze da lui condotte su piccole sferette di magnetite che egli chiamò *terrule*. Mostrò come sottili aghi magnetici, disposti nelle vicinanze di una sfera di materiale magnetico, subissero delle azioni torcenti disponendosi lungo delle linee che partendo da un *polo* terminavano nel *polo* opposto. Estrapolando i risultati così ottenuti, egli affermò che la terra altro non era che un grosso magnete, i poli magnetici del quale erano situati in vicinanza dei poli geografici: come sappiamo questo concetto è oggi alla base della moderna teoria del magnetismo terrestre.

Nel 1777 C. A. Coulomb, per mezzo della stessa bilancia di torsione da lui impiegata per ricavare la legge sulle forze esercitantesi tra cariche elettriche, stabilì una legge analoga per le attrazioni magnetiche. La dimostrazione che anche la forza attrattiva o repulsiva tra due piccoli corpi magnetizzati presentava un andamento proporzionale all'inverso del quadrato della loro distanza impresso un notevole vigore alle ricerche inerenti i corpi magnetici. Si arriva così ai primi dell'ottocento con l'opinione diffusa tra i ricercatori che i fenomeni elettrici ed i fenomeni magnetici dovessero avere qualcosa in comune anche se non era stato possibile mettere in evidenza alcuna influenza reciproca tra corpi elettricamente carichi e calamite naturali. Fu il fisico danese Hans Christian Oersted che nel 1820 scoprì l'esistenza di una interazione tra magneti naturali e cariche in moto. Per primo infatti egli si accorse che una corrente elettrica produceva una azione rotante su un ago di materiale magnetizzato posto in vicinanza del filo percorso da corrente. Tale scoperta segnò l'inizio della moderna teoria del magnetismo. La comunicazione di questi risultati data nel settembre 1820 da Arago alla Accademia delle Scienze Francesi spinsero A. M. Ampère a ripetere ed ampliare le esperienze di Oersted. Il fisico francese non solo riuscì a riottenere in breve tempo i risultati di Oersted ma dimostrò anche che due fili percorsi nello stesso verso da corrente elettrica si attraggono mentre quando vengono percorsi dalla corrente in verso opposto si respingono. Trovò inoltre che una spira mobile percorsa da corrente in presenza di un corpo magnetizzato o di un'altra spira percorsa da corrente si orienta in una determinata direzione in maniera analoga e quanto avviene per l'ago di una bussola. L'intuizione più famosa di Ampère resta comunque quella sull'origine elettrica delle forze magnetiche: essa è basata sull'ipotesi che attorno ad ogni molecola di un corpo magnetico possa circolare una corrente elettrica microscopica. Tutte queste scoperte, unite a quella compiuta intorno al 1832 da M. Faraday sull'induzione elettromagnetica, vennero infine riprese, rielaborate e

poste nella forma matematica definitiva, che è quella che ancor oggi utilizziamo, da Clark Maxwell. Scopo di questo e dei tre successivi capitoli è quello di esporre le principali leggi che regolano i fenomeni del magnetismo, di dare qualche breve cenno sulla loro interpretazione microscopica e di ricavare le corrispondenti equazioni di Maxwell nel vuoto e nella materia.

Al fine di introdurre alcuni concetti elementari cominciamo col ricordare una semplice esperienza, che fu anche una delle più significative compiute da Ampère. Precisamente quella relativa all'azione reciproca fra due circuiti A e B nei quali siano inseriti dei generatori, che consentono di fare circolare in essi delle correnti elettriche. Supponiamo che il circuito A sia tenuto fisso, mentre quello B sia libero di ruotare attorno ad un asse. È immediato constatare che quando si faccia fluire corrente nei due circuiti, il circuito mobile B si mette in moto ruotando fino ad assumere una determinata posizione, dipendente da quella di A . Si può così concludere che fra i due circuiti si esercitano delle forze che, per il fatto di trarre origine dalla corrente elettrica, si sogliono chiamare *elettrodinamiche*. E come l'azione elettrica fra due cariche si ritiene dovuta al fatto che ognuna di esse è immersa nel campo elettrico generato dall'altra, così l'azione elettrodinamica fra correnti (che, come sappiamo, non sono altro che cariche in moto) può essere interpretata come dovuta al fatto che ciascuna di esse viene a trovarsi immersa in un particolare campo (distinto da quello elettrico) generato dall'altra. A tale campo si dà il nome di *campo magnetico*. Più precisamente, dunque, una carica in moto esercita su un'altra carica *oltre alla forza di natura elettrica*, un'altra forza denominata *magnetica*.

In base a quanto detto è anche chiaro che effetti analoghi si avranno sostituendo al filo percorso da corrente del circuito B un fascetto di elettroni quale è quello che si ha in un tubo a raggi catodici. Si osserva infatti che, sotto l'azione del campo magnetico creato dal circuito A , il fascetto di elettroni subisce una deflessione.

In questo capitolo ci limiteremo allo studio del campo magnetico generato da circuiti, disposti nel vuoto, percorsi da correnti stazionarie: studieremo cioè la cosiddetta *magnetostatica nel vuoto*.

Campi magnetici sono anche quelli generati dai *magneti naturali* (calamite) e dai *magneti permanenti*, di acciaio, sui quali torneremo in seguito; vedremo allora che il comportamento delle calamite e dei magneti artificiali può essere compreso alla luce dei risultati relativi ai campi magnetici generati dalle correnti in conformità a quanto intuito da Ampère.

8.2 Il vettore induzione magnetica B

Come per esplorare il campo elettrico si adopera una carica puntiforme di piccolo valore (in modo che essa non alteri per influenza o per polarizzazione elettrostatiche la distribuzione delle cariche generanti il campo che si vuole studiare), così per esplorare il campo magnetico si può ricorrere a una carica analoga in moto.

Ricordiamo che il campo elettrico \mathbf{E} viene definito come il rapporto :

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} \quad (8.1)$$

essendo q la carica esploratrice ed \mathbf{F} la forza a cui essa è soggetta. Nell'assumere questa definizione si suppone che la carica q sia tenuta ferma in un punto dello spazio e che su di essa non agisca altra forza se non quella di natura elettrica. In modo analogo, nel definire il vettore \mathbf{B} , che caratterizza il campo magnetico e prende il nome di *vettore induzione magnetica*, ⁽¹⁾ si suppone che sulla carica q , in moto con la velocità \mathbf{u} , non operino altre forze (di natura ad esempio elettrica o meccanica) all'infuori di quella dovuta alla esistenza di un campo magnetico. Misurando allora il valore della forza \mathbf{F} , dovuta alle azioni magnetiche nelle varie direzioni, si osserva che nella direzione di \mathbf{u} tale forza è nulla mentre essa risulta massima in direzione perpendicolare ad \mathbf{u} ; inoltre il modulo della forza è proporzionale alla carica q e al modulo u della velocità. Assumeremo come direzione e verso del vettore induzione magnetica \mathbf{B} in un certo punto la direzione e il verso che risulta dalla relazione sperimentale:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B} . \quad (8.2)$$

Si può poi verificare che questa relazione è effettivamente valida per tutte le velocità \mathbf{u} . La (8.2) è comunemente denominata *forza di Lorentz*.

È importante notare come non sia sufficiente una sola operazione di misura per determinare \mathbf{B} . Infatti non è possibile, con una semplice operazione, ricavare \mathbf{B} dalla relazione vettoriale (8.2) e questo è messo bene in evidenza dalle relazioni (1.18) e (1.19) riportate nel primo capitolo. Eseguendo due misure di \mathbf{F} , che denoteremo \mathbf{F}_1 ed \mathbf{F}_2 , in corrispondenza a due velocità \mathbf{u}_1 ed \mathbf{u}_2 tra loro normali, in virtù della (8.2) si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F}_1 \times \mathbf{u}_1}{u_1^2} + c_1 \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F}_2 \times \mathbf{u}_2}{u_2^2} + c_2 \mathbf{u}_2 \end{aligned} \quad (8.3)$$

Moltiplicando scalarmente per \mathbf{u}_1 queste relazioni, ricordando che \mathbf{u}_1 ed \mathbf{u}_2

⁽¹⁾ Secondo la concezione *moderna* del magnetismo, da noi seguita in questo libro, risulterebbe più appropriato attribuire al vettore \mathbf{B} il nome di *intensità del campo magnetico*, dato che esso è l'analogo magnetico del vettore \mathbf{E} , intensità di campo elettrico. Nella concezione *antica* del campo magnetico, la quale metteva in primo piano il campo magnetico generato dalle calamite, al vettore \mathbf{B} era stato riservato il nome di vettore induzione magnetica. Si è tuttavia convenuto, al fine di evitare noiosi cambiamenti di nomenclatura, di conservare tale nome anche nelle esposizioni moderne del magnetismo, sebbene esso appaia evidentemente improprio.

sono tra loro perpendicolari, e sottraendo la seconda dalla prima, otteniamo:

$$c_1 u_1^2 = \frac{1}{q} \frac{(\mathbf{F}_2 \times \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{u}_1}{u_2^2} \quad (8.4)$$

espressione che permette di determinare la costante c_1 . La prima delle (8.3) può pertanto scriversi:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{q} \frac{\mathbf{F}_1 \times \mathbf{u}_1}{u_1^2} + \frac{1}{q} \frac{(\mathbf{F}_2 \times \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{u}_1}{u_1^2 u_2^2} \mathbf{u}_1 \quad (8.5)$$

da cui si vede esplicitamente come per la determinazione del vettore \mathbf{B} siano necessarie e sufficienti due distinte misure. Dalla (8.2) è possibile ricavare le dimensioni e le unità di misura dell'induzione magnetica B . Si ha infatti per le dimensioni:

$$[B] = \frac{[F]}{[q][u]} = \frac{[mlt^{-2}]}{[q][lt^{-1}]} = [mt^{-1}q^{-1}]$$

mentre l'unità di misura nel sistema MKS è:

$$\frac{\text{newton} \cdot \text{secondo}}{\text{coulomb} \cdot \text{metro}} = \frac{\text{volt} \cdot \text{secondo}}{\text{metro}^2} = \frac{\text{weber}}{\text{metro}^2}$$

(8.7)

avendo denominato weber il volt \times secondo; un weber/m² è il valore dell'induzione magnetica che esercita su una carica di un coulomb, che si muova perpendicolarmente al campo magnetico con la velocità di 1 m/s, la forza di un newton.

Vogliamo osservare che la definizione di \mathbf{B} per mezzo della forza di Lorentz non è la sola possibile. Nella letteratura si trovano frequentemente altre due definizioni, ovviamente equivalenti a quella da noi adottata. La prima di queste è basata sulla forza a cui è sottoposto, in un campo magnetico, un elemento di conduttore metallico in cui fluisca una corrente di intensità I ; la seconda sul momento meccanico della coppia di forze che il campo magnetico esercita su un circuito attraversato da corrente. Nei paragrafi successivi tratteremo brevemente questi due argomenti cogliendo l'occasione per introdurre alcuni concetti fondamentali per l'esposizione della teoria della magnetostatica.

8.3 Forza agente su un circuito percorso da corrente

Consideriamo un filo metallico rettilineo di lunghezza l e sezione costante S , percorso da una corrente stazionaria di intensità I , posto in una regione dello spazio ove esista un campo magnetico uniforme. Si può provare sperimentalmente che sul conduttore agisce una forza, dovuta solo alle azioni magnetiche, data dalla relazione:

$$\mathbf{F} = I \mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (8.8)$$

dove \mathbf{B} è il vettore induzione magnetica introdotto nel paragrafo precedente ed \mathbf{I} è un vettore che ha modulo uguale alla lunghezza del filo e direzione e verso coincidenti con quelli in cui fluisce la corrente I . Appare evidente come quest'ultima relazione possa essere utilizzata in luogo della (8.2) per la definizione del vettore \mathbf{B} .

Vogliamo ora dimostrare che la relazione (8.8) può essere ricavata partendo da un punto di vista microscopico utilizzando l'espressione della forza di Lorentz agente su una carica in moto. La corrente I che percorre il filo è uguale a JS dove \mathbf{J} è la densità di corrente che, come sappiamo, è data da:

$$\mathbf{J} = -e N \mathbf{u} \quad (8.9)$$

con N numero di elettroni liberi per unità di volume, e modulo della carica dell'elettrone ed \mathbf{u} velocità di deriva degli elettroni. Essendo il conduttore immerso in un campo magnetico uniforme, su ognuno degli elettroni liberi si esercita la forza di Lorentz $\mathbf{F} = -e \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ e sul filo agisce quindi una forza risultante uguale a:

$$\mathbf{F} = -e NSl \mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (8.10)$$

avendo tenuto conto che il numero totale di elettroni liberi nel conduttore è uguale ad NSl . Questa espressione, utilizzando la (8.9), diviene:

$$\mathbf{F} = Sl \mathbf{J} \times \mathbf{B}. \quad (8.11)$$

Attribuendo un'orientazione al filo e precisamente quella della densità di corrente \mathbf{J} , si può scrivere

$$\mathbf{F} = I \mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (8.12)$$

che è appunto la relazione macroscopica sperimentale introdotta all'inizio di questo paragrafo.

Nel caso di un circuito di forma qualsiasi, percorso da corrente stazionaria I e posto in un campo magnetico in generale non uniforme, è possibile calcolare la forza agente su di esso applicando una formula, dovuta a Laplace, secondo la quale ogni elemento infinitesimo $d\mathbf{l}$ di circuito è sottoposto ad una forza:

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (8.13)$$

avendo indicato con \mathbf{B} il valore dell'induzione magnetica nel punto ove è posto l'elemento $d\mathbf{l}$, orientato nella direzione e verso di percorrenza della corrente. Integrando la (8.13) lungo la linea C del circuito otteniamo:

$$\mathbf{F} = \oint_C I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \quad (8.14)$$

che rappresenta la forza risultante esercitata dal campo magnetico sul circuito stesso. L'espressione (8.13) prende il nome di *seconda formula di Laplace*.

È importante notare come tra le espressioni (8.12) e (8.13) esista una differenza fondamentale. Infatti mentre la prima rappresenta una relazione sperimentale ricavabile in pratica mediante un circuito di prova di dimensioni piccole rispetto alla distanza su cui il campo magnetico si mantiene uniforme, la seconda consiste in una formula matematica di natura puramente teorica, riguardante quantità infinitesime, la cui validità è verificata solo a posteriori confrontando il valore della forza \mathbf{F} determinata sperimentalmente con il valore dato dalla (8.14).

Poiché valgono le relazioni $I \, d\mathbf{l} = \mathbf{J} \, S \, d\mathbf{l} = \mathbf{J} \, d\mathbf{v}$ è possibile ottenere dalla (8.13) la relazione:

(8.15)

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{J} \times \mathbf{B} \, d\mathbf{v}$$

estendendo l'integrale al volume V occupato dal conduttore percorso da corrente.

8.4 Coppia agente su un circuito chiuso percorso da corrente

Sia dato un circuito C , piano e di forma qualsiasi, percorso da una corrente I , posto in una regione dello spazio ove esista un campo magnetico che supporremo uniforme nella regione in cui è posta la spira di corrente. Sulla spira agisce una forza nulla; infatti per la (8.14) abbiamo che:

$$\mathbf{F} = \oint_C I \, d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = I \left[\oint_C d\mathbf{l} \right] \times \mathbf{B} = 0 \quad (8.16)$$

essendo ovviamente l'integrale entro parentesi uguale a zero. A causa dell'uniformità del campo magnetico è dunque $\mathbf{F} = 0$; è però possibile dimostrare che in generale sulla spira percorsa da corrente agisce una coppia di forze. A tale scopo scegliamo una terna di assi cartesiani in modo che l'asse z sia perpendicolare al piano contenente la spira ed orientato in modo che la corrente I fluisca in verso antiorario rispetto ad esso. Il vettore induzione magnetica \mathbf{B} , uniforme su tutta la superficie delimitata dalla spira, formi un angolo ϑ con l'asse z , il piano $z = 0$ coincida con il piano contenente la spira e l'asse x della terna cartesiana sia parallelo alla proiezione del vettore \mathbf{B} su questo piano.

Immaginiamo di suddividere il nostro circuito in tante piccole strisce, il contorno di ognuna delle quali rappresenti una spira di altezza infinitesima percorsa dalla corrente I , sempre in verso antiorario. Due spire adiacenti qualsiasi, hanno un tratto in comune in cui fluisce una corrente di intensità uguale ma di verso opposto; se riuniamo tutte le spire elementari in modo da riottenere il circuito iniziale, l'unica corrente che risulta in definitiva diversa da zero (cioè non compensata da altre in senso opposto) è quella che circola lungo il contorno del circuito. Consideriamo in particolare la spira elementare $A_1 A_2 A_3 A_4$ di

Fig. 8.1. Valutiamo anzitutto l'effetto delle forze cui è sottoposta la spira a causa della presenza della componente del vettore \mathbf{B} lungo la direzione z . Tali forze, come indicato dalla (8.14), agiranno nel piano della spira. Date le dimensioni elementari della spira, le lunghezze dei suoi lati opposti possono essere considerate uguali; poiché le forze agenti su di essi sono proporzionali alla lunghezza dei lati esse risultano a due a due uguali in modulo e dirette in verso opposto, formando così un sistema in equilibrio. Seguendo un procedimento diverso abbiamo ritrovato pertanto per un caso particolare il risultato espresso in forma generale dalla equazione (8.16).

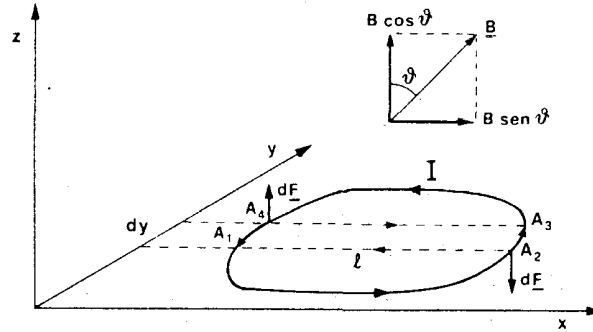


FIG. 8.1 - Coppia agente su un circuito percorso da corrente in presenza di un campo magnetico.

Per quanto riguarda le forze esercitate dalla componente del vettore induzione magnetica lungo l'asse x , $B \sin \vartheta$, abbiamo che due di esse, e precisamente quelle applicate ai lati $A_1 A_2$ ed $A_3 A_4$ sono nulle perché la componente di \mathbf{B} è rispettivamente parallela e antiparallela alla direzione della corrente. Le altre due forze, applicate ai lati $A_2 A_3$ e $A_4 A_1$, risultano uguali in modulo, dirette perpendicolarmente al piano contenente la spira ma con verso opposto: esse formano perciò una coppia di forze. Entrambe le forze sono proporzionali alla lunghezza dy della proiezione del lato $d\mathbf{l}$ in questione sull'asse y , e sono date dalla relazione $dF = IB \sin \vartheta dy$. Il modulo del momento meccanico della coppia è allora:

(8.17)

$$d\mathcal{M} = IB \sin \vartheta l dy$$

dove l è la distanza tra i punti di applicazione delle due forze. Indicando con da l'area $l dy$ della spira elementare, introduciamo la seguente grandezza vettoriale:

$$d\mathbf{m} = I da \mathbf{n} \quad (8.18)$$

con \mathbf{n} che rappresenta il versore normale alla superficie della spira orientato in modo da veder scorrere la corrente in verso antiorario (nel nostro caso perciò

\mathbf{n} è parallelo all'asse z). La grandezza (8.17) prende il nome di *momento magnetico* della spira elementare.

Per la (8.18) il momento meccanico della coppia di forze applicata alla spira elementare di superficie da assume la forma:

$$d\mathcal{M} = d\mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (8.19)$$

e, per l'uniformità del vettore \mathbf{B} , il momento meccanico della coppia agente su tutto il circuito C risulta dato da:

$$\mathcal{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (8.20)$$

dove:

$$\mathbf{m} = IS \mathbf{n} \quad (8.21)$$

è il momento magnetico del circuito C , racchiudente una superficie S , percorso dalla corrente I .

L'azione della coppia di forze dovuta al campo magnetico tende a far ruotare il piano in cui giace la spira fino a che esso non risulti perpendicolare al vettore \mathbf{B} . In questa condizione, come appare evidente dalla (8.20), il momento meccanico \mathcal{M} risulta nullo poiché \mathbf{m} e \mathbf{B} sono paralleli.

È anche interessante ricavare l'espressione (8.20) seguendo un procedimento diverso da quello ora descritto. A questo scopo consideriamo nuovamente il

circuito C . Su un tratto di esso agisce una forza $d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$, ed il
 \mathcal{M} momento
 d di questa forza rispetto all'origine O degli assi cartesiani vale:

$$d\mathcal{M} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = I \mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (8.22)$$

con \mathbf{r} che rappresenta la distanza orientata tra O ed il tratto $d\mathbf{l}$. Integrando la (8.22) lungo la linea chiusa C otteniamo:

$$\mathcal{M} = I \oint_C \mathbf{r} \times (d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (8.23)$$

Sostituendo nell'integrale (8.23) $\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$, $d\mathbf{l} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}$ ed $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ si ha:

$$\mathcal{M} = I \left[-B_x \mathbf{i} \oint_C y \, dz - B_y \mathbf{j} \oint_C x \, dz - B_z \mathbf{k} \oint_C x \, dy - B_x \mathbf{j} \oint_C x \, dy - B_y \mathbf{i} \oint_C y \, dx - B_z \mathbf{k} \oint_C y \, dx - B_x \mathbf{i} \oint_C y \, dx - B_y \mathbf{j} \oint_C x \, dx - B_z \mathbf{k} \oint_C x \, dx - B_x \mathbf{j} \oint_C x \, dy - B_y \mathbf{i} \oint_C y \, dx - B_z \mathbf{k} \oint_C y \, dx \right] \quad (8.24)$$

I primi tre integrali a destra della (8.24) sono nulli, come può essere visto (vedi Fig. 8.2) spezzando l'integrale lungo C in due parti, una da P_1 a P_2 e l'altra da P_2 a P_1 .

Il quarto integrale è invece diverso da zero e fornisce l'area racchiusa dal circuito C . Infatti l'integrale esteso da P_1 a P_2 , come può vedersi in Fig. 8.2, dà come risultato l'area della zona tratteggiata in figura più quella racchiusa dalla linea C , mentre l'integrale esteso da P_2 a P_1 rappresenta l'area della sola zona tratteggiata con il segno negativo.

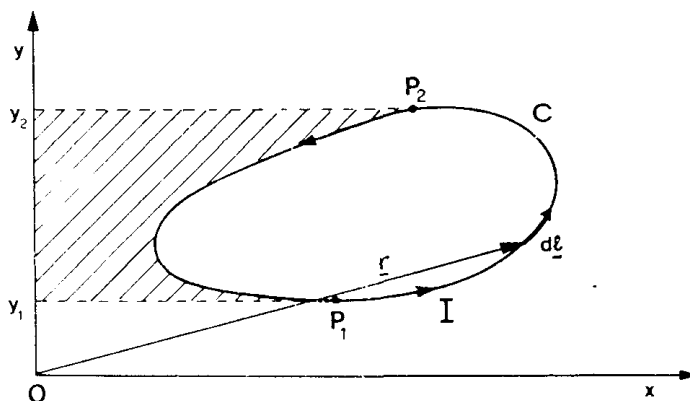


FIG. 8.2 - Calcolo degli integrali della relazione (8.24).

In definitiva troviamo che, avendo preso $\mathbf{m} = m\mathbf{k}$:

$$\mathcal{M} = I S \mathbf{k} \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (8.25)$$

risultato che coincide con la (8.20).

Mediante ragionamenti analoghi è inoltre facile dimostrare che vale la relazione:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l} \quad (8.26)$$

dove $\mathbf{S} = S\mathbf{n}$.

Il momento di dipolo magnetico della spira può essere così espresso anche nella forma:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} I \oint_C \mathbf{r} \times d\mathbf{l}. \quad (8.27)$$

8.5 Comportamento di un ago magnetico in un campo magnetico

Un ago di materiale magnetico, libero di ruotare intorno ad un asse, sottoposto all'azione di un campo magnetico, quale ad esempio quello generato da una distribuzione di correnti, si comporta in *maniera analoga* al circuito elementare descritto nel paragrafo precedente. E precisamente: esso si dispone

parallelamente alla direzione del vettore \mathbf{B} in modo tale che il suo polo nord si rivolge nel verso di \mathbf{B} ⁽¹⁾.

Se l'ago viene scostato dalla sua posizione di equilibrio, è possibile constatare che esso viene richiamato in tale posizione da una coppia di forze, il cui momento meccanico dipende dal vettore \mathbf{B} secondo una espressione del tipo :

$$\mathcal{M} = \mathbf{K} \times \mathbf{B} \quad (8.28)$$

ove \mathbf{K} è un vettore caratteristico del particolare ago considerato, dipendente cioè dalle sue dimensioni e dalla sua magnetizzazione, orientato nel senso polo Sud - polo Nord dell'ago (asse dell'ago). La relazione (8.28) mostra che il momento della coppia che si esercita sull'ago è perpendicolare al piano contenente l'ago e il vettore \mathbf{B} , ed ha modulo:

$$\mathcal{M} = KB \sin \vartheta \quad (8.29)$$

essendo ϑ l'angolo tra l'asse dell'ago ed il vettore \mathbf{B} .

Osserviamo che un comportamento simile a quello di un ago magnetico immerso in un campo magnetico descritto dall'equazione (8.28) è quello, trattato nel paragrafo 4.3, di un dipolo elettrico posto in un campo elettrostatico \mathbf{E} . Avendo definito il momento di dipolo elettrico con $\mathbf{p} = q\delta$ eravamo stati in grado di mostrare che, sotto l'azione di un campo elettrostatico \mathbf{E} , il dipolo era soggetto ad una coppia di momento $\mathcal{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$. L'analogia formale tra questa espressione e la (8.28), suggerisce di immaginare l'ago magnetico come costituito da due *cariche magnetiche*, o come si suol dire *masse magnetiche*, $+q_m$ e $-q_m$, una positiva e l'altra negativa, concentrate rispettivamente nel polo Nord e nel polo Sud dell'ago. ⁽²⁾

Introducendo allora un vettore $\mathbf{m} = q_m \delta$, che denomineremo momento magnetico dell'ago, tale che:

$$\mathbf{K} = \mathbf{m} = q_m \delta \quad (8.30)$$

⁽¹⁾ Una immediata applicazione di quanto detto è la bussola: quando l'ago magnetico è sottoposto alla sola azione del campo magnetico terrestre, esso si orienta in modo da indicare la direzione del Nord.

⁽²⁾ Come risulta chiaro dalla nostra espressione, il concetto di *massa magnetica* è del tutto fittizio; nella primitiva concezione del magnetismo, ormai superata, si attribuiva invece ad esso un significato fisico effettivo analogo a quello attribuito alle cariche elettriche. Fu Weiss che introdusse nella teoria moderna la parola *magnetone* per rappresentare una massa magnetica elementare analoga all'elettrone. Questo *magnetone* o monopolio magnetico, che fino ad oggi non ha potuto trovare conferma sperimentale, è sempre risultato per i fisici estremamente allettante in quanto l'esistenza di una tale carica renderebbe simmetriche le equazioni di Maxwell. Ricerche volte ad isolare un monopolio magnetico sono in corso in molti laboratori; alcune di queste erano state precedentemente condotte cercando la presenza di monopoli nella radiazione cosmica. In particolare si è esaminata la tensione indotta in una spira superconduttrice quando ad esempio attraverso di essa viene fatto passare del materiale, quale un meteorite, che è stato soggetto ad un lungo bombardamento da parte di raggi cosmici.

la (8.28) si scrive:

$$= \mathbf{m} \times \mathbf{B}. \quad (8.31)$$

Si noti che la (8.30) costituisce, a tutto rigore, la definizione stessa della massa magnetica q_m associata a un dipolo magnetico di momento magnetico \mathbf{K} .

Il confronto tra la (8.31) e la (8.20) mostra immediatamente che l'azione meccanica che si esercita rispettivamente su di un ago magnetico e su di un circuito percorso da corrente immersi in un campo magnetico è la stessa se il momento magnetico dell'ago e quello del circuito, definito secondo la (8.21) come $IS \mathbf{n}$, hanno lo stesso valore. In altri termini, sempre che sia verificata l'eguaglianza tra i rispettivi momenti magnetici, ago magnetico e circuito percorso da corrente risultano equivalenti agli effetti dell'azione meccanica esercitata su di essi da parte di un campo magnetico esterno che tende ad orientare il momento magnetico \mathbf{m} parallelamente al suo vettore \mathbf{B} . Ma come fu dimostrato da Ampère l'equivalenza tra ago magnetico e circuito è ancora più stretta, in quanto si può provare (come vedremo in seguito) che essi sono equivalenti non solo per quanto riguarda le azioni meccaniche subite da parte di un campo magnetico in cui si trovino immersi, ma anche per quanto riguarda il campo magnetico da essi generato.

Le precedenti considerazioni sull'analogia tra dipolo elettrico e dipolo magnetico e tra spira percorsa da corrente ad ago magnetico suggeriscono la possibilità di considerare un circuito percorso da una corrente I sotto un nuovo aspetto, particolarmente interessante. Prendiamo in esame un circuito C percorso da una corrente I e suddividiamo una superficie qualsiasi S , che si appoggi su tale circuito e venga quindi da esso delimitata, in tante piccole areole elementari da . Secondo lo schema utilizzato nel paragrafo precedente si può pensare che il bordo di ciascuna di queste areole sia percorso dalla corrente I sempre nello stesso verso e che la sovrapposizione di tutte queste areole fornisca, come già detto, il circuito C iniziale. Ad ognuna delle superficie elementari da è associato un momento magnetico $d\mathbf{m} = I da \mathbf{n}$. Per l'equivalenza tra spira ed ago magnetico caratterizzati da un eguale momento magnetico possiamo considerare la spira elementare come una superficie fisica da sulle cui due faccie esistono due distribuzioni di poli magnetici di segno opposto separate da una piccola distanza δ orientata come la normale esterna \mathbf{n} . La densità superficiale σ_m di queste distribuzioni è data dalla relazione:

$$d\mathbf{m} = I da \mathbf{n} = \sigma_m da \delta \quad (8.32)$$

e quindi:

$$\sigma_m = \frac{I}{\delta} \quad (8.33)$$

Sommando tutte le areole da otteniamo una superficie sulle cui due faccie esistono due distribuzioni superficiali di poli magnetici $\pm \sigma_m$ con modulo dato

dalla (8.33) separate da una distanza δ . Tale superficie prende il nome di *lamina magnetica*, ed ai fini degli effetti magnetici a grande distanza è equivalente al circuito C percorso dalla corrente I .

8.6 Moto di un elettrone in un campo magnetico uniforme

Prendiamo in esame una regione dello spazio nella quale sia presente un campo magnetico uniforme e scegliamo una terna di assi cartesiani in modo tale che il vettore induzione magnetica risulti parallelo all'asse z , cioè $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ (essendo \mathbf{k} il versore dell'asse z). Consideriamo un elettrone in moto nella regione di campo magnetico uniforme con velocità iniziale $\mathbf{v}_0 = v_{0x}\mathbf{i} + v_{0y}\mathbf{j} + v_{0z}\mathbf{k}$.

L'elettrone di carica $-e$ è soggetto alla forza di Lorentz :

$$\mathbf{F} = -e \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (8.34)$$

pertanto, tenendo conto delle sole azioni magnetiche, l'equazione del moto dell'elettrone, di massa m , è:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -e \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (8.35)$$

e proiettando sugli assi cartesiani :

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -e \frac{dy}{dt} B \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= e \frac{dx}{dt} B \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= 0. \end{aligned} \quad (8.36).$$

Dall'ultima delle (8.36) si ricava immediatamente che:

$$\frac{dz}{dt} = v_z = \text{cost} = v_{0z}. \quad (8.37)$$

Poiché inoltre la forza di Lorentz risulta essere perpendicolare allo spostamento e quindi non compie lavoro, l'energia cinetica W_k dell'elettrone si mantiene costante, come si può anche direttamente verificare moltiplicando scalarmente per \mathbf{v} ambo i membri della (8.35); pertanto:

$$W_k = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \text{cost}. \quad (8.38)$$

Avendo dimostrato che v_z è costante, dalla (8.38) deriva che:

$$(v_x^2 + v_y^2) = \text{cost} = (v_{0x}^2 + v_{0y}^2). \quad (8.39)$$

Le prime due equazioni del sistema (8.36) possono essere scritte in maniera compatta nella forma:

$$(8.40) \quad \frac{dv_x}{dt} = -\omega_c v_y$$

con $\omega_c = eB/m$. Queste due
disaccoppiate per quanto
Infatti derivando entrambe

espressioni possono essere
riguarda le incognite v_x e v_y .
rispetto al tempo, si ottiene:

$$(8.41) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 v_x}{dt^2} &= -\omega_c^2 v_x \\ \frac{d^2 v_y}{dt^2} &= -\omega_c^2 v_y \end{aligned}$$

Assumiamo per la prima della (8.41) la soluzione:

$$v_x = A \sin(\omega_c t + \varphi) \quad (8.42)$$

dove A e φ sono due costanti positive da determinare mediante le condizioni iniziali. Sostituendo la (8.42) nella prima delle (8.40) ricaviamo che:

$$v_y = -A \cos(\omega_c t + \varphi). \quad (8.43)$$

Ponendo inoltre $v_1 = (v_{0x}^2 + v_{0y}^2)^{1/2}$ ed utilizzando la condizione (8.39) si deduce che $A = v_\perp$ per cui :

$$v_x = v_\perp \sin(\omega_c t + \varphi) \quad (8.44)$$

$$v_y = -v_\perp \cos(\omega_c t + \varphi)$$

Dovendo poi essere all'istante $t = 0$: $v_x(0) = v_{0x}$ e $v_y(0) = v_{0y}$, dalla (8.44) si trova che:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{v_{0x}}{v_{0y}}. \quad (8.45)$$

Integrando le equazioni (8.44) e (8.37) si trova che:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{v_\perp}{\omega_c} \cos(\omega_c t + \varphi) + x_0 \\ y &= -\frac{v_\perp}{\omega_c} \sin(\omega_c t + \varphi) + y_0 \\ z &= v_{0z} t + z_0 \end{aligned} \quad (8.46)$$

dove x_0 , y_0 e z_0 devono essere determinate mediante le condizioni iniziali. Prendendo l'origine delle coordinate nel punto ove l'elettrone si trova all'istante $t = 0$, si ha (essendo $v_{x0} = v_{\perp} \sin \varphi$, $v_{y0} = -v_{\perp} \cos \varphi$) che $x_0 = -v_{y0}/\omega_c$, $y_0 = v_{x0}/\omega_c$ e $z_0 = 0$.

Dalla (8.46) è possibile vedere come l'elettrone si muova descrivendo un'elica il cui asse è parallelo alla direzione del vettore \mathbf{B} . La proiezione del moto dell'elettrone su un piano perpendicolare all'asse z consiste in una orbita circolare con centro nel punto x_0, y_0 e raggio:

$$r_L = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} = \frac{(v_{0x}^2 + v_{0y}^2)^{1/2}}{eB} m.$$

(8.46a)

La misura sperimentale del raggio dell'orbita e la conoscenza della velocità iniziale dell'elettrone nella direzione perpendicolare al vettore \mathbf{B} permettono quindi, tramite la (8.46a) di determinare l'intensità del campo magnetico nella regione presa in esame. In un campo magnetico con un valore di \mathbf{B} di 1 weber/m² ⁽¹⁾ un elettrone dotato di una velocità perpendicolare a \mathbf{B} di 10⁸ m/s compirebbe un'orbita circolare con un raggio di circa 0,5 mm.

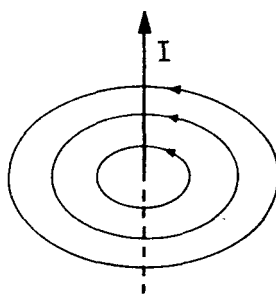
8.7 Campo generato da un filo rettilineo indefinito percorso da corrente. Legge di Biot e Savart

Ogni circuito percorso da corrente stazionaria deve ovviamente essere un circuito chiuso. Tuttavia se ci poniamo ad una distanza r dal circuito molto minore rispetto alle sue dimensioni lineari, potremo considerare in prima approssimazione il conduttore percorso da corrente come un filo rettilineo indefinito.

Consideriamo quindi un filo indefinito percorso da una corrente elettrica stazionaria I . Per esplorare il campo magnetico da esso generato nella regione circostante il filo stesso potremo ricorrere, come fecero i primi sperimentatori, alla osservazione della deviazione di un ago magnetico disposto nei vari punti della regione in esame. Il risultato di questa esperienza ci permetterebbe di stabilire che un filo rettilineo percorso da una corrente costante produce attorno a sé un campo magnetico caratterizzato da un vettore \mathbf{B} le cui linee di forza sono circonferenze che giacciono in un piano normale al conduttore e aventi i centri su di esso; il verso delle linee di forza è quello antiorario per un osservatore posto in piedi sul piano contenente la linea di forza e orientato secondo il verso di percorrenza della corrente ⁽²⁾. come mostrato in Fig. 8.3. La misura del valore di \mathbf{B} nei vari punti dello spazio fu fatta in una serie di celebri esperienze

⁽¹⁾ Un campo magnetico di questo tipo può essere ritenuto sufficientemente intenso tenendo conto che il valore di \mathbf{B} per il campo magnetico terrestre è di 5×10^{-5} weber/m².

⁽²⁾ Il verso delle linee di forza può essere determinato, secondo la definizione stessa data da Ampère, rirondando il conduttore con le dita della mano destra tenendo il pollice diretto nella direzione di percorrenza della corrente I : il verso indicato dalle restanti quattro dita e quello delle linee di forza.

FIG. 8.3 - Linee di forza del vettore \mathbf{B} generato da un filo indefinito percorso da corrente.

da Biot e Savart osservando le oscillazioni compiute da un ago magnetico sotto l'azione del campo. La legge che essi derivarono, e che da loro prende nome, è la seguente:

(8.47)

essendo I l'intensità di corrente, r la distanza dal filo del punto in cui si misura il campo e K una costante di proporzionalità, dipendente dal particolare sistema di unità di misura scelto. Nel sistema M. K. S. si pone $K = \mu_0/2\pi$ e la quantità μ_0 , chiamata *permeabilità magnetica del vuoto*, risulta avere il valore numerico :

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} . \quad (8.48)$$

In realtà, per ragioni che almeno in parte risulteranno chiare in seguito, oggi si preferisce assumere il valore $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ come una definizione; in tal caso la (8.47) serve a determinare, con notevole precisione, l'unità di intensità di corrente, cioè l'ampere.

Le dimensioni di μ_0 sono:

(8.49)

$$[\mu_0] = \left| \frac{\text{newton}}{\text{metro} \cdot \text{ampere}} \right| = \left| \frac{\text{newton}}{\text{metro} \cdot \text{ampere}} \right| = \left| \frac{\text{newton}}{\text{metro}} \right| . \quad \text{Poiché si}$$

definisce:

$$1 \text{ henry} = 1 \text{ ohm} \times 1 \text{ secondo} \quad (8.50)$$

la permeabilità magnetica del vuoto si misura anche in henry/metro.

Per la (8.47) e per quanto detto precedentemente sull'andamento delle linee di forza, il vettore \mathbf{B} generato da un filo rettilineo percorso da una corrente I , è dato da:

(8.51)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{2} \frac{\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} I$$

dove \mathbf{s} è un versore orientato secondo il verso della corrente e \mathbf{r} è un vettore di modulo pari alla distanza tra il filo ed il punto in cui si considera il campo, orientato nel verso che va dal filo al punto (Fig. 8.4). Le tre direzioni \mathbf{r} , \mathbf{B} , \mathbf{s} individuano una terna cartesiana.

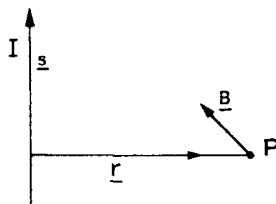


FIG. 8.4 - Campo magnetico creato da un filo indefinito percorso da corrente.

8.8 Prima formula di Laplace e sue applicazioni

La legge sperimentale (8.51) di Biot e Savart vale solamente nel caso in cui sia possibile ritenere verificata l'approssimazione di filo rettilineo indefinito. In tutti gli altri casi, quando cioè tale approssimazione non sia più valida o il circuito abbia una forma complicata o si sia in presenza di più circuiti percorsi da corrente, la determinazione analitica del vettore induzione magnetica \mathbf{B} nei vari punti dello spazio può essere fatta utilizzando il principio di sovrapposizione ed una "formula elementare, dovuta a Laplace.

Tale legge elementare, chiamata *prima formula di Laplace*, stabilisce che un elemento $d\mathbf{l}$ di circuito percorso da una corrente I produce in un punto P , distante \mathbf{r} da esso, un vettore induzione magnetica:

(8.52)

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}$$

avendo scelto come orientamento di $d\mathbf{l}$ quello del verso di percorrenza della corrente e come orientamento di \mathbf{r} quello dall'elemento $d\mathbf{l}$ al punto P in considerazione.

Se, rispetto all'origine O delle coordinate di una terna di riferimento cartesiana l'elemento $d\mathbf{l}$ è caratterizzato dal vettore \mathbf{r}' ed il punto P dal vettore \mathbf{r} .

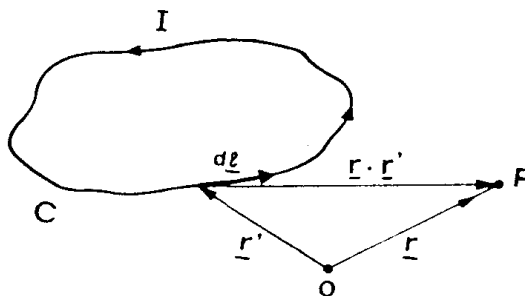


FIG. 8.5 - Applicazione della prima formula di Laplace ad un circuito generico.

come mostrato in Fig. 8.5, l'espressione (8.52) assume la forma:

(8.53)

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Poiché l'esperienza mostra che il principio di sovrapposizione vale per i fenomeni magnetici in maniera analoga a quanto si verifica per i fenomeni elettrici, possiamo ritenere che il vettore \mathbf{B} , generato da un circuito C percorso da corrente I , in un punto P distante \mathbf{r} dall'origine delle coordinate, sia uguale alla somma di tanti contributi $d\mathbf{B}$, del tipo (8.53), dovuti ai singoli elementi infinitesimi $d\mathbf{l}$ in cui possiamo immaginare suddiviso il circuito C . Il valore dell'induzione magnetica in un punto distante \mathbf{r} dall'origine si ottiene allora integrando la (8.53) lungo il circuito C :

(8.54)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_C \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

dove \mathbf{r}' , come abbiamo già detto, rappresenta la distanza del generico elemento $d\mathbf{l}$ dall'origine O . Nel caso si abbia a che fare con più circuiti percorsi da corrente, il valore di \mathbf{B} in un punto è dato dalla somma di integrali simili a quello che compare nella (8.54).

Se in luogo di fili percorsi da corrente, il problema riguarda più in generale distribuzioni di correnti è possibile considerare al posto della (8.54) l'espressione:

(8.55)

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

sfruttando la relazione $I d\mathbf{l} = \mathbf{J} dv$. L'integrale è ora esteso a tutto lo spazio in cui la densità di corrente \mathbf{J} è diversa da zero.

La (8.53) è una formula puramente teorica e, dato che non è possibile isolare un singolo elemento di corrente $d\mathbf{l}$ di un circuito, la sua validità non è suscettibile di verifica sperimentale diretta. Tale validità è tuttavia garantita dal fatto che sono possibili innumerevoli prove tendenti a confrontare il valore di \mathbf{B} , prodotto da distribuzioni di corrente estremamente differenti tra loro e misurato sperimentalmente, con il valore calcolabile dalle espressioni (8.54) e (8.55): in tutti i casi l'accordo risulta più che soddisfacente.

a) Campo magnetico generato da un filo rettilineo indefinito

Una semplice applicazione della prima formula di Laplace è quella relativa ad un filo rettilineo indefinito percorso da una corrente stazionaria I . Per semplicità assumiamo che il filo coincida con l'asse z di un sistema di assi cartesiani

e che la corrente fluisca parallelamente alla direzione dell'asse z . Sia P il punto, distante r dal filo, nel quale vogliamo determinare il valore di \mathbf{B} generato dalla corrente I , e indichiamo con d la distanza tra un elemento generico dz del filo ed il punto P , come mostrato in Fig. 8.6.

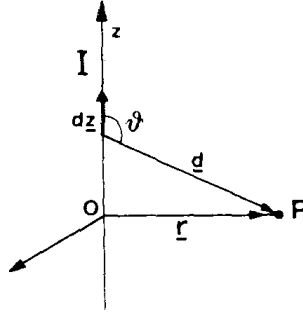


FIG. 8.6 - Applicazione della prima formula di Laplace ad un filo rettilineo percorso da corrente.

Per la relazione (8.53), nella quale dobbiamo sostituire \mathbf{d} a $(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, un elemento dz del circuito fornisce nel punto P un contributo al vettore induzione magnetica uguale a:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dz \sin \vartheta}{d^2} \quad (8.56)$$

dove ϑ è l'angolo formato tra l'elemento dz ed il vettore \mathbf{d} . Integrando la (8.56) lungo il filo si ricava il modulo dell'induzione magnetica in P , cioè:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz \sin \vartheta}{d^2}. \quad (8.57)$$

Tenendo poi conto delle relazioni:

$$\begin{aligned} d &= \frac{r}{\sin \vartheta} \\ z &= \frac{r}{\operatorname{tg}(\pi - \vartheta)} = -\frac{r}{\operatorname{tg} \vartheta} \\ dz &= \frac{r}{\sin^2 \vartheta} d\vartheta \end{aligned}$$

l'integrale che compare nella (8.57) può essere trasformato in un integrale rispetto alla variabile ϑ esteso da 0 a π ; si ha così:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r} \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \quad (8.58)$$

Questo valore di B calcolato tramite la formula di Laplace coincide con quello fornito dalla legge sperimentale di Biot e Savart introdotta nel paragrafo precedente. Per quanto riguarda poi la direzione ed il verso del vettore \mathbf{B} nel punto P è facile rendersi conto tramite la (8.53) che esso è perpendicolare al piano contenente l'asse z ed il punto P . In Fig. 8.6 pertanto il vettore \mathbf{B} risulta perpendicolare al foglio con il verso entrante.

b) *Campo magnetico generato da una spira*

Consideriamo una spira piana circolare di raggio R percorsa da una corrente continua I . Ci proponiamo di calcolare il valore del vettore \mathbf{B} in un punto qualsiasi dell'asse della spira che assumeremo coincidente con l'asse z di una terna cartesiana, come mostrato in Fig. 8.7.

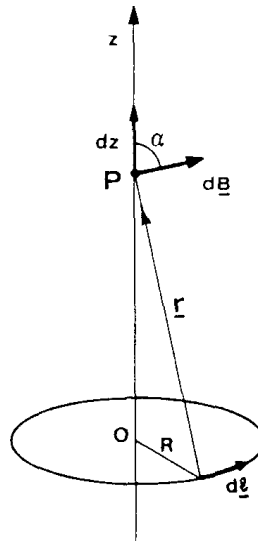


FIG. 8.7 - Campo assiale di una spira circolare percorsa da corrente.

Innanzitutto è immediato provare, considerando due elementi $d\mathbf{l}$ del circuito simmetrici rispetto all'origine, che il vettore \mathbf{B} in ogni punto P dell'asse z risulta diretto parallelamente all'asse stesso. È sufficiente quindi considerare di ogni vettore infinitesimo $d\mathbf{B}$ dovuto ad un elemento $d\mathbf{l}$ della spira solamente la componente dB_z . Indicando con r la distanza tra un generico elemento $d\mathbf{l}$ ed il punto P in questione e tenendo conto che l'angolo formato dal vettore \mathbf{r} e da $d\mathbf{l}$ è un angolo retto, applicando la formula (8.52) abbiamo che:

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2} \cos \alpha \quad (8.59)$$

dove α rappresenta l'angolo tra $d\mathbf{B}$ e l'asse z . Poiché inoltre valgono le relazioni:

$$r = (R^2 + z^2)^{1/2} ; \quad \cos \alpha = \frac{R}{r} , \quad (8.60)$$

la (8.59) può essere scritta nel modo seguente:

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{R \, dl}{(R^2 + z^2)^{3/2}} . \quad (8.61)$$

Integrando lungo il percorso della spira si ottiene il risultato:

$$B = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} . \quad (8.62)$$

In particolare al centro della spira il valore dell'induzione magnetica risulta essere :

$$B = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R} . \quad (8.63)$$

In Fig. 8.8 sono riportate in modo schematico le linee di forza del vettore **B** generato da una spira percorsa da corrente. Lungo l'asse della spira il vettore **B** risulta perpendicolare al piano contenente la spira ed orientato nella stessa direzione lungo la quale un osservatore, in piedi in questo piano, vedrebbe la corrente fluire in verso antiorario.

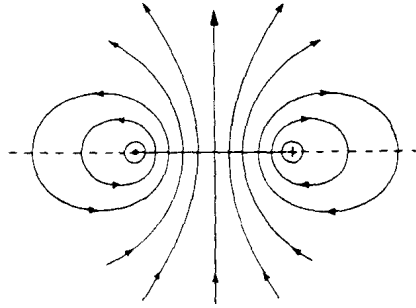


FIG. 8.8 - Linee di forza del vettore **B** di una spira circolare. Il punto indica la direzione della corrente uscente dalla pagina, la croce la direzione entrante nella pagina.

c) Campo magnetico generato da un solenoide

Si definisce *solenoid* un avvolgimento cilindrico di filo conduttore come quello mostrato in Fig. 8.9.

Consideriamo un solenoide per il quale l'avvolgimento del filo sia uniforme in modo che il numero N di spire per unità di lunghezza sia costante; inoltre in prima approssimazione non teniamo conto del fatto che l'avvolgimento del solenoide ha un andamento a spirale ma immaginiamo che ciascuna spira del

solenoidi sia piana ; ciò ci permette di trattare il solenoide come formato da una successione di spire piane tra loro parallele tutte percorse dalla stessa corrente. Quest'ultima ipotesi rende possibile il calcolo del valore della induzione magnetica \mathbf{B} generata lungo l'asse da un solenoide percorso da corrente utilizzando l'espressione (8.63).

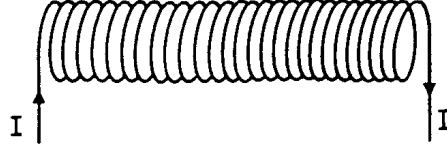


FIG. 8.9 - Solenoide.

Prendiamo in esame in particolare un solenoide di lunghezza l , formato da N spire per unità di lunghezza, di raggio R , percorse da una corrente stazionaria I . L'asse del solenoide sia orientato parallelamente all'asse z di un sistema di riferimento cartesiano avente l'origine ad una estremità dell'avvolgimento.

Indichiamo con z la posizione del punto P , nel quale vogliamo calcolare il vettore \mathbf{B} e con z' la posizione, variabile tra O ed l , di una generica spira del solenoide. Supponiamo di scomporre il solenoide in tratti di lunghezza infinitesima dz' ognuno dei quali contenente un numero di spire pari a $N dz'$. Il contributo al vettore \mathbf{B} dato nel punto P dalle spire contenute nell'elemento dz' , caratterizzato dal valore z' della coordinata, per la (8.62) è:

$$dB(z) = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2 N dz'}{[R^2 + (z - z')^2]^{3/2}}. \quad (8.64)$$

Come è possibile verificare per mezzo della Fig. 8.10 valgono le relazioni:

(8.65a)

$$(z - z') = \frac{R}{\operatorname{tg} \vartheta}$$

$$dz' = \frac{R d\vartheta}{\operatorname{sen}^2 \vartheta}.$$

(8.65b)

Sostituendo le (8.65) nella (8.64) si ha che:

$$dB(z) = \frac{\mu_0}{2} IN \operatorname{sen} \vartheta d\vartheta \quad (8.66)$$

ed integrando su tutto il solenoide, cioè tra ϑ_1 e ϑ_2 , così come sono indicati in Fig. 8.10, si ottiene:

$$B(z) = \frac{\mu_0}{2} IN \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \operatorname{sen} \vartheta d\vartheta = \frac{\mu_0}{2} IN (\cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2). \quad (8.67)$$

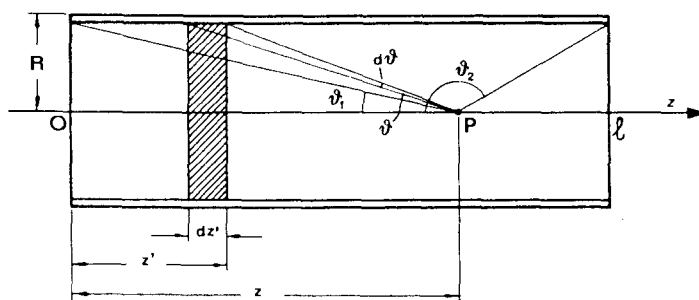
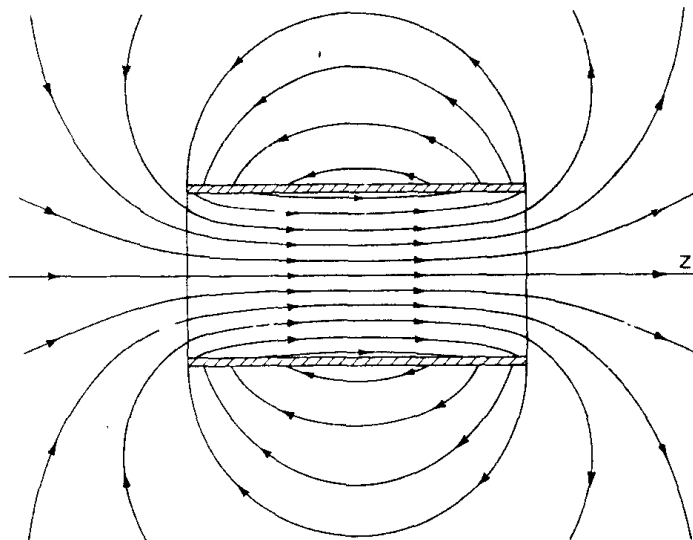


FIG. 8.10 - Calcolo del campo magnetico assiale di un solenoide.

Se la lunghezza del solenoide è molto maggiore del diametro delle spire che lo compongono si può adottare la cosiddetta approssimazione di *solenoido infinito*; in questa approssimazione si pone $\vartheta_1 = 0$ e $\vartheta_2 = \pi$ e per un punto P , che non sia troppo vicino ai bordi del solenoide, si ricava dalla relazione (8.67) il valore:

$$B = \mu_0 IN. \quad (8.68)$$

Ovviamente il vettore \mathbf{B} sull'asse del solenoide, essendo generato da una successione di spire piane, risulta parallelo all'asse z , mentre nei punti al di fuori dell'asse ha l'andamento mostrato in Fig. 8.11 dove sono riportate le linee di

FIG. 8.11 - Linee di forza di \mathbf{B} in un solenoide.

forza di \mathbf{B} relative ad un solenoide sufficientemente lungo e sottile da poter essere considerato infinito. È interessante notare come nella regione centrale di un tale solenoide il vettore \mathbf{B} risulti pressoché parallelo all'asse del cilindro anche in punti che si discostano dall'asse. In Fig. 8.11 sono disegnate anche alcune linee

di forza di \mathbf{B} esterne al solenoide ; si può notare come la superficie formata dalle spire percorse da corrente costituisca una discontinuità per il vettore \mathbf{B} . In effetti se tracciassimo le linee di forza in prossimità del filo di una singola spira non troveremmo variazioni così nette ma scopriremmo che esse hanno un andamento piuttosto complicato e continuo all'intorno dei fili.

In Fig. 8.12 è mostrato l'andamento del valore del vettore induzione magnetica sull'asse di un solenoide la cui lunghezza l è di 100 cm e il raggio R di 10 cm.

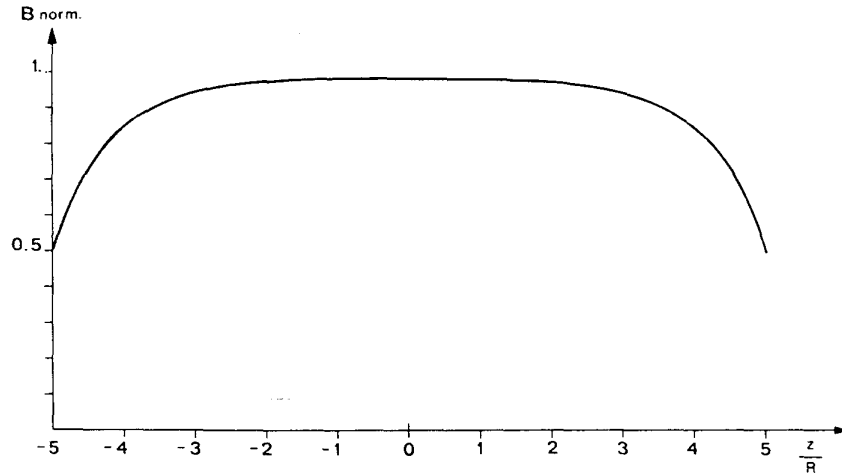


FIG. 8.12 - Andamento di B lungo l'asse di un solenoide con $l/R = 10$.

In ordinate è riportato il valore di \mathbf{B} normalizzato al valore \mathbf{B}_0 di un solenoide infinito di uguali caratteristiche. Come si può notare dalla figura il modulo di \mathbf{B} , nell'intervallo che va dal centro del solenoide fino ad un punto corrispondente a circa 4 volte la lunghezza del raggio delle spire, è uniforme entro il 4%. Inoltre il valore di \mathbf{B} al centro del solenoide risulta inferiore a quello che si avrebbe in un solenoide infinito di ugual numero di spire per unità di lunghezza, con lo stesso raggio, e che fosse percorso dalla stessa corrente I .

8.9 Forze agenti tra due circuiti percorsi da corrente

In questo paragrafo ci proponiamo di calcolare la forza che un circuito C_1 di forma qualsiasi percorso da una corrente I_1 esercita su un altro circuito C_2 percorso da una corrente I_2 . Un elemento $d\mathbf{l}_2$ del secondo circuito, posto a distanza \mathbf{r} dall'origine delle coordinate, subisce da parte del campo magnetico generato in quel punto dal primo circuito una forza che per la seconda formula di Laplace risulta essere:

$$d\mathbf{F} = I_2 (d\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}(\mathbf{r})). \quad (8.69).$$

Il vettore induzione magnetica $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ prodotto dal primo circuito nel punto \mathbf{r} può essere a sua volta calcolato per mezzo della prima formula di Laplace. La forza complessiva agente sul secondo circuito si ottiene allora integrando la (8.69) lungo la linea C_2 , ossia:

$$\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_2} d\mathbf{l}_2 \times \oint_{C_1} \frac{d\mathbf{l}_1 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}. \quad (8.70)$$

Questa relazione, che rappresenta l'espressione matematica relativa ad una delle prime esperienze di Ampère, risolve in linea di principio il problema che

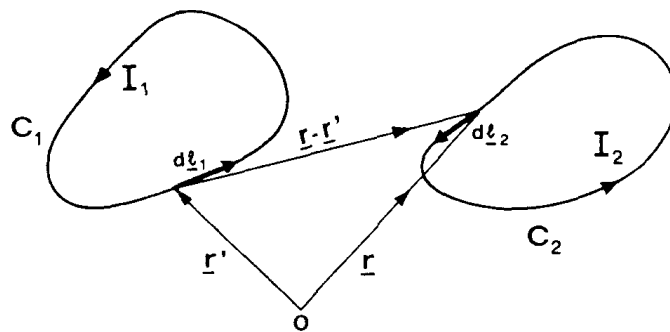


FIG. 8.13 - Interazione magnetica tra due circuiti percorsi da corrente.

ci eravamo posti, anche se in pratica per circuiti di forma generica il calcolo degli integrali che in essa compaiono può risultare tutt'altro che semplice.

Come applicazione particolare della (8.70) consideriamo il caso di due fili rettilinei ed indefiniti, percorsi dalla corrente I_1 e I_2 , posti ad una distanza a .

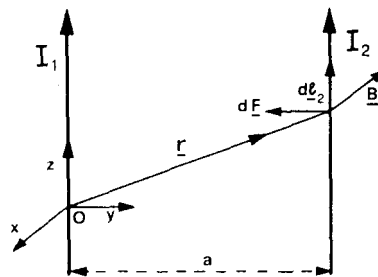


FIG. 8.14 - Il campo magnetico \mathbf{B} generato dalla corrente I_1 esercita una forza $d\mathbf{F}$ sull'elemento dl_2 percorso dalla corrente I_2 .

Scegliamo un sistema di riferimento, come mostrato in Fig. 8.14, tale che il primo filo giaccia lungo l'asse z ed il secondo, ad esso parallelo, passi per il punto $x = 0, y = a$.

Il vettore \mathbf{B} generato dalla corrente I_1 in ogni punto del conduttore percorso da I_2 è quello dato dalla legge di Biot e Savart:

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{a} \mathbf{i} \quad (8.71)$$

esso risulta avere verso antiparallelo a quello dell'asse x , in accordo col fatto che le linee di forza di \mathbf{B} sono delle circonferenze concentriche al filo rettilineo percorse in verso antiorario rispetto ad un osservatore orientato nella direzione della corrente. La forza esercitata dal campo magnetico generato dal primo filo su un elementino $d\mathbf{l}_2 = dl_2 \mathbf{k}$ del secondo filo è quindi:

$$d\mathbf{F} = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{a} (dl_2 \mathbf{k} \times \mathbf{i}) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{a} dl \mathbf{j} \quad (8.72)$$

dove nell'ultimo passaggio è stato ommesso l'indice 2 all'elemento di circuito. La (8.72) ci mostra che la forza esercitata dal primo filo sul secondo, quando i fili sono percorsi da correnti concordi, è diretta in verso antiparallelo all'asse y e cioè che essa è attrattiva; in modo analogo si può vedere che la forza esercitantesi tra due fili percorsi da correnti I_1 e I_2 fra loro discordi ha lo stesso modulo del caso precedente ma è repulsiva.

Dalla (8.72) mediante integrazione è possibile ottenere la forza che si esercita su un tratto finito di lunghezza l del secondo filo. Si ha:

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{a} l. \quad (8.73)$$

Ricordando che $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (newton/ampere²), da questa espressione si ricava che tra due fili posti ad un metro di distanza e percorsi ciascuno da una corrente di 1 ampere, si esercita una forza per unità di lunghezza di 2×10^{-7} newton. Si può quindi dare una definizione di ampere, basandosi sulla relazione (8.73), che introduca solo grandezze meccaniche.

8.10 Potenziale scalare magnetico

Vogliamo ora esaminare se sia possibile ricavare per il vettore induzione magnetica \mathbf{B} una relazione simile alla (2.19) trovata per il campo elettrostatico, e cioè se sia possibile scrivere il vettore \mathbf{B} come gradiente di un certo potenziale scalare, vale a dire:

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \mathbf{grad} \varphi_m. \quad (8.74)$$

Apparirà chiaro in seguito perché è stata introdotta a priori in questa espressione la quantità μ_0 , che formalmente non trova corrispondenza nella relativa formula del campo elettrostatico.

Ammettendo per ipotesi che la (8.74) sia valida, cerchiamo di determinare la funzione φ_m nel caso di un campo magnetico generato da una spira piana C percorsa da una corrente I . Il vettore induzione magnetica \mathbf{B} , generato in un punto P , è dato dalla espressione (8.54), dove l'integrale è esteso a tutto il circuito chiuso C . Se operiamo uno spostamento del punto P di una quantità infinitesima arbitraria $d\mathbf{s}$, come mostrato in Fig. 8.15, il potenziale φ_m subisce

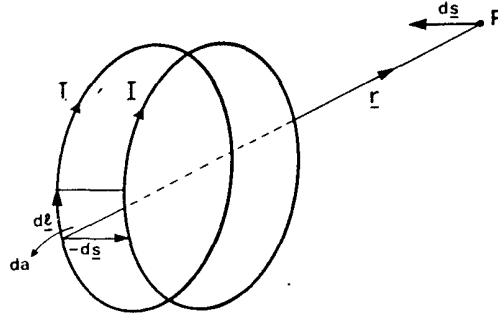


FIG. 8.15 - Metodo per derivare il potenziale scalare magnetico.

una variazione $d\varphi_m$ che, per la relazione (1.26), è uguale a:

$$d\varphi_m = \mathbf{grad} \varphi_m \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} . \quad (8.75)$$

Se nella (8.75) introduciamo l'espressione di \mathbf{B} data dalla prima formula di Laplace (8.54) otteniamo la relazione:

$$d\varphi_m = -\frac{I}{4\pi} \oint_C \frac{d\mathbf{s} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{r})}{r^3} \quad (8.76)$$

dove $d\mathbf{s}$ è stato portato sotto segno di integrale, trattandosi di una quantità costante, e con \mathbf{r} si è indicata la distanza tra il generico elemento $d\mathbf{l}$ della spira e il punto P .

È possibile ovviamente ottenere la stessa variazione del potenziale $d\varphi_m$ tenendo fisso il punto P e facendo subire alla spira C uno spostamento $-d\mathbf{s}$. Per effetto di questo spostamento l'elemento $d\mathbf{l}$ descrive una superficie elementare da di area uguale al modulo del vettore $(d\mathbf{s} \times d\mathbf{l})$. Utilizzando la regola (1.15) del triplo prodotto misto possiamo scrivere per il numeratore dell'integrando dell'espressione (8.76) :

$$-d\mathbf{s} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{r}) = -\mathbf{r} \cdot (d\mathbf{s} \times d\mathbf{l}) . \quad (8.77)$$

La quantità $-\mathbf{r} \times (d\mathbf{s} \times d\mathbf{l})$ rappresenta il prodotto tra la proiezione dell'area da in un piano perpendicolare ad \mathbf{r} ed \mathbf{r} . Pertanto avremo che l'integrale che

compare nella (8.76) non è altro che la variazione $d\omega$ dell'angolo solido prodotta dallo spostamento ds del punto P :

$$d\omega = - \oint_C \frac{\mathbf{r} \cdot (d\mathbf{s} \times d\mathbf{l})}{r^3}. \quad (8.78)$$

La variazione di potenziale $d\varphi_m$ diviene quindi:

$$d\varphi_m = \frac{I}{4\pi} d\omega \quad (8.79)$$

e il potenziale scalare magnetico generato in P dalla spira è perciò:

$$\varphi_m = \frac{I\omega}{4\pi} \quad (8.80)$$

dove ω rappresenta l'angolo solido sotteso tra P e tutta la spira C .

Si suddivida ora la superficie S delimitata dalla spira C in tanti elementi di area da . Tali elementi possono essere riguardati come piccole spire percorse, tutte nello stesso verso, da una corrente I lungo i loro bordi, come mostrato in Fig. 8.16.

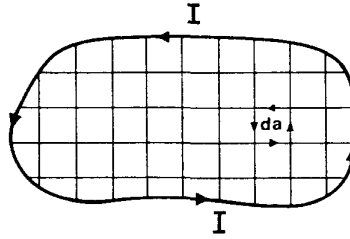


FIG. 8.16 - Spira finita di corrente suddivisa in un insieme di spire elementari.

Poiché ogni coppia di spire adiacenti ha in comune un tratto percorso dalla stessa corrente I con verso opposto, la somma di tutte le correnti delle spire contenute nella superficie S fornisce una sola corrente, diversa da zero, ed uguale ad I , che fluisce lungo il bordo esterno di S , che coincide con il circuito C di partenza. Ad ogni elemento di superficie possiamo inoltre associare un versore \mathbf{n} diretto normalmente a da e con un verso tale che un osservatore orientato nello stesso modo vedrebbe la corrente fluire lungo il bordo di da in verso antiorario. Nel caso di Fig. 8.16 \mathbf{n} ha la direzione uscente dal foglio. Indichiamo poi con $d\mathbf{a}$ la quantità vettoriale $da \mathbf{n}$.

Poiché per definizione si ha che nel punto P :

$$\omega = \int_S \frac{d\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (8.81)$$

possiamo scrivere che per il potenziale magnetico vale la seguente espressione:

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{I \, d\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^3}. \quad (8.82)$$

Nel paragrafo 8.4 abbiamo definito mediante la relazione (8.18) il momento magnetico $d\mathbf{m} = I \, d\mathbf{a} \, \mathbf{n}$ di una spira elementare di superficie da percorsa da una corrente I . Tenendo conto di questa definizione la (8.82) diviene:

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{d\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \quad (8.83)$$

l'integrale essendo esteso alla superficie della spira.

Nel caso che il punto P , in cui si vuole calcolare il campo, sia ad una distanza molto maggiore delle dimensioni lineari della spira, di modo che la spira possa essere considerata molto piccola, la (8.83) può essere approssimata ⁽¹⁾ dalla relazione :

$$\varphi_m = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3} \quad (8.84)$$

dove $\mathbf{m} = SI \, \mathbf{n}$.

D'altra parte tale espressione risulta valida anche per un aghetto magnetico di momento magnetico \mathbf{m} . Possiamo così enunciare la seconda parte del principio di equivalenza tra spire percorse da corrente e aghetti magnetici, a completamento di quanto già detto nel paragrafo 8.5 riguardo alle azioni meccaniche che un campo magnetico esercita su spire ed aghi magnetici. La relazione (8.84) ci permette infatti di affermare che il campo magnetico generato da una spira di superficie S percorsa da corrente I , in punti lontani dalla spira, è uguale al campo magnetico generato da un ago magnetico di momento magnetico \mathbf{m} , purché esso abbia un valore $\mathbf{m} = IS \, \mathbf{n}$, sia cioè uguale al momento magnetico della spira. In altre parole ago magnetico e spira percorsa da corrente, caratterizzati dallo stesso valore del momento magnetico \mathbf{m} , sono equivalenti per quanto riguarda il campo magnetico da essi generato in un punto dello spazio.

8.11 Legge della circuitazione di Ampère

Abbiamo mostrato che il vettore \mathbf{B} analogamente al campo elettrostatico, può essere rappresentato come gradiente di una funzione scalare φ_m , cui è stato dato il nome di funzione potenziale scalare magnetico. A differenza del potenziale

⁽¹⁾ È possibile dimostrare, sviluppando particolareggiatamente il calcolo, che tale approssimazione è analoga a quella introdotta nella determinazione del potenziale elettrostatico generato da un dipolo elettrico.

elettrostatico, il potenziale magnetico φ_m non è però una funzione del punto ad un solo valore, perché tale non è l'angolo solido ω che compare nella espressione (8.80).

Per giustificare questa affermazione cominciamo con il far notare che nel calcolo che ha portato alla definizione di φ_m il segno è stato determinato dalla scelta del verso, fatta secondo la convenzione introdotta nel paragrafo 8.4, del versore \mathbf{n} normale al piano della spira. Questo fa sì che lo spazio circostante la spira possa essere suddiviso in due semispazi rispetto al piano in cui giace il circuito; uno dei quali, quello contenente il punto P nel nostro esempio di Fig. 8.17, verrà indicato come semispazio positivo e l'altro, quello opposto, come semispazio negativo.

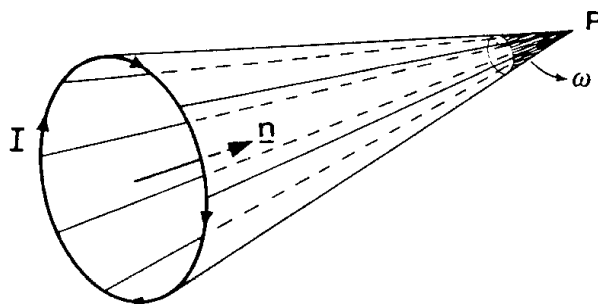


FIG. 8.17 - Angolo solido sotteso in P da una spira di corrente. La direzione di \mathbf{n} indica il semispazio positivo.

Aggiungiamo inoltre che l'angolo solido ω , sotteso dalla spira in P , è dato dalla (8.81), è l'angolo solido interno. Con riferimento all'esempio di Fig. 8.17 parleremo quindi d'ora in avanti in corrispondenza al semispazio a destra della spira, quello positivo, di angolo solido positivo quando considereremo l'angolo solido interno, e di angolo solido negativo quando considereremo quello esterno. Nel caso di un punto contenuto nel semispazio negativo l'angolo solido positivo sarà quello esterno e l'angolo solido negativo quello interno. Evidentemente se si inverte il verso di percorrenza della corrente I lungo la spira bisogna di conseguenza modificare quanto è stato detto, scambiando i due semispazi.

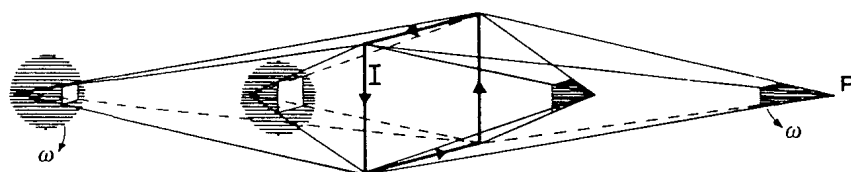


FIG. 8.18 - Andamento dell'angolo solido positivo ω al variare del punto P dal semispazio positivo a quello negativo, passando attraverso la spira di corrente.

Muoviamo ora il punto P nel semispazio positivo e facciamo tendere all'infinito la sua distanza dalla spira; l'angolo solido sotteso in P dalla spira, assume valori sempre più piccoli fino a divenire nullo. Se invece avviciniamo il punto

al piano della spira, l'angolo ω continua ad aumentare, trasformandosi con continuità in quello esterno, ed al tendere del punto all'infinito nel semispazio negativo tende a 4π . L'andamento dell'angolo solido positivo al variare di P da $+\infty$ a $-\infty$ passando attraverso la spira è quello mostrato in Fig. 8.18. D'altra parte possiamo sempre far percorrere al punto P un cammino, come ad esempio quello mostrato in Fig. 8.19, che partendo dal semispazio positivo

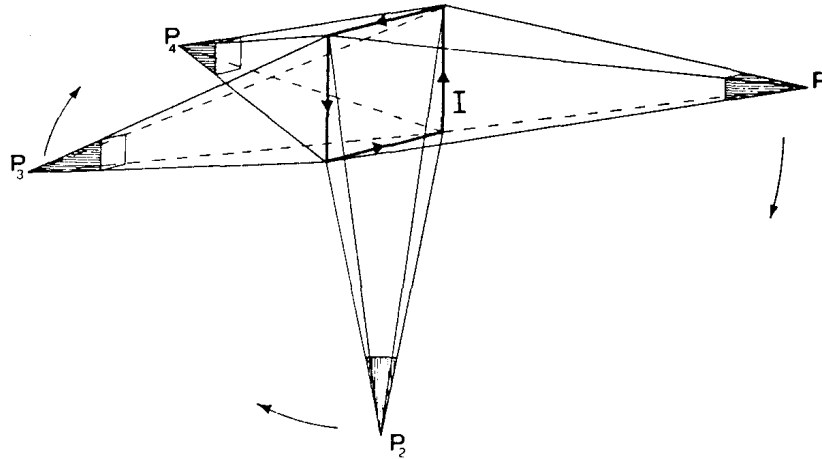


FIG. 8.19 - Andamento dell'angolo solido ω per spostamenti del punto P intorno alla spira. In P_1 e P_2 l'angolo solido è positivo, in P_3 e P_4 l'angolo solido è negativo.

a destra, giri intorno alla spira ed arrivi nel semispazio negativo a sinistra. In questo caso l'angolo solido parte da un valore positivo ω , diviene nullo quando il punto P si trova nello stesso piano della spira, e poi, essendo l'angolo solido una funzione continua del punto, assume valori negativi via via crescenti e tendenti al valore di -2π , che è raggiunto quando il punto giunge nel piano della spira, muovendosi nel semispazio negativo.

Se il punto ora attraversa il piano della spira, passando così dal semispazio negativo a quello positivo, l'angolo solido da considerare è quello esterno che nel semispazio positivo è quello che abbiamo definito come negativo. Ritornando così nel punto di partenza, l'angolo solido ha assunto il valore $(\omega - 4\pi)$. Da tutto ciò concludiamo che l'angolo solido, e quindi il potenziale scalare magnetico, non è una funzione del punto ad un solo valore. Se infatti il punto P compie una serie di n cammini che attraversano la spira, il valore dell'angolo solido sotteso in P varia e diviene uguale a $\omega \pm n 4\pi$ dove il segno dipende dal verso di percorrenza dei cammini intorno alla spira ⁽¹⁾. Risulta inoltre evidente che se il cammino chiuso percorso dal punto P non attraversa la superficie della spira la variazione dell'angolo solido è nulla.

⁽¹⁾ In particolare, secondo le convenzioni da noi fatte, bisogna considerare il segno meno quando il cammino compiuto dal punto intorno alla spira viene percorso nello stesso verso dalle linee di forza del vettore \mathbf{B} generato dalla spira.

Consideriamo un circuito percorso da una corrente I ed eseguiamo la circuitazione del vettore \mathbf{B} lungo una linea chiusa qualsiasi che supponiamo concatenata con il circuito; assumeremo come verso di percorrenza di questa linea quello concorde con il verso della linea di forza di \mathbf{B} generato dalla corrente I . Tenendo conto della relazione $\mathbf{B} = -\mu_0 \mathbf{grad} \varphi_m$ e delle proprietà dell'operatore gradiente si ha che:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = -\mu_0 \oint \mathbf{grad} \varphi_m \cdot d\mathbf{l} = -\mu_0 \oint d\varphi_m = -\mu_0 \Delta\varphi_m. \quad (8.85)$$

Nella (8.85) $d\mathbf{l}$ sta ad indicare un tratto infinitesimo della linea chiusa che concatena il circuito e $\Delta\varphi_m$ la variazione che il potenziale scalare magnetico subisce lungo il cammino chiuso considerato.

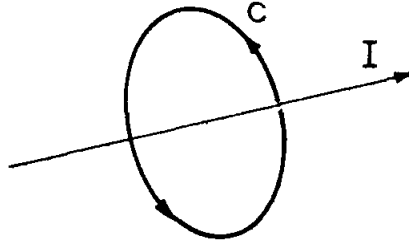


FIG. 8.20 - Corrente I concatenata dalla linea C . Il verso di percorrenza di C indicato è quello positivo.

La differenza fondamentale tra la (8.85) e la relazione analoga ricavata per l'elettrostatica sta proprio nel fatto che la variazione del potenziale scalare magnetico non è nulla lungo il cammino chiuso da noi scelto ma è proporzionale alla variazione dell'angolo solido, che come abbiamo dimostrato, per un cammino chiuso concatenato una sola volta con il circuito, è uguale a $\pm 4\pi$. Allora, per la definizione del potenziale scalare magnetico, e poiché nel nostro caso $\Delta\omega = -4\pi$, si ha:

$$-\Delta\varphi_m = -I \frac{\Delta\omega}{4\pi} = I \quad (8.86)$$

e quindi:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I. \quad (8.87)$$

Se la linea concatena il circuito n volte la (8.87) diviene:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = n \mu_0 I. \quad (8.88)$$

Nel caso in cui la linea chiusa lungo la quale viene calcolata la circuitazione di \mathbf{B} non concatena alcun circuito percorso da corrente avremo che la variazione

di ω lungo tale linea è nulla, risulta dunque nulla la variazione del potenziale scalare magnetico e di conseguenza anche la circuitazione di \mathbf{B} . Le relazioni (8.87) e (8.88) prendono il nome di *legge della circuitazione di Ampère*.

In maniera analoga a quanto fatto per il potenziale elettrico anche il potenziale magnetico φ_m può essere definito in un punto P mediante l'espressione:

$$\varphi_m = -\frac{1}{\mu_0} \int_{\infty}^P \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (8.89)$$

scegliendo per convenzione il punto di riferimento (in cui il potenziale è nullo) all'infinito. Osserviamo però nuovamente che il valore fornito dalla (8.89) non è unico perché dipende dal fatto che il cammino scelto per andare da P all'infinito concateni o no il circuito percorso da corrente. Rappresentando la corrente I che compare nella (8.87) mediante la densità di corrente \mathbf{J} , cioè

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{a} \quad (8.90)$$

possiamo porre la legge della circuitazione di Ampère nella forma:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{a} \quad (8.91)$$

dove S è una superficie aperta qualsiasi che ha come contorno la linea chiusa C . Applicando all'integrale di sinistra il teorema di Stokes otteniamo:

$$\int_S \text{rot } \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{a} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{a} \quad (8.92)$$

e poiché la (8.92) deve essere valida qualunque sia la superficie di integrazione S , si ricava che:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (8.93)$$

che rappresenta il teorema di Ampère in forma differenziale. È possibile notare dalla (8.93) che il vettore \mathbf{B} risulta irrotazionale in tutti i punti dello spazio dove \mathbf{J} è nullo, dove cioè non esiste passaggio di corrente. Questo è ovviamente in accordo con quanto detto finora sull'esistenza di un potenziale magnetico scalare che per la (8.89) è univocamente determinato solo in quelle regioni dello spazio che non contengono circuiti percorsi da corrente.

8.12 Il flusso di \mathbf{B}

Esaminando attentamente quanto esposto nei paragrafi dedicati alla legge di Biot e Savart e alle applicazioni della prima formula di Laplace, si può notare

che in tutti gli esempi riportati si è arrivati alla conclusione che le linee di forza di \mathbf{B} o sono linee chiuse, o vanno all'infinito o ne provengono.

Più in generale si nota che per il campo magnetico, a differenza di quanto accade per il campo elettrico, non esistono punti di accumulazione delle linee di forza ; ciò significa che il campo vettoriale \mathbf{B} non presenta punti sorgenti del campo. Prendiamo allora in esame una superficie chiusa S in una regione dello spazio ove esista un campo magnetico e applichiamo le considerazioni illustrate nel paragrafo 1.5 relative alla relazione tra numero di linee di forza di un campo vettoriale che attraversano una superficie chiusa e valore del flusso del campo vettoriale attraverso la stessa superficie. Poiché le linee di forza di \mathbf{B} sono o linee chiuse o linee che vanno all'infinito o ne provengono, si ha che attraverso la superficie chiusa S il numero di linee di forza entranti è uguale al numero di linee di forza uscenti: la loro somma algebrica è quindi nulla. In altre parole all'interno di S , come già detto, non esistono sorgenti del campo e quindi il flusso di \mathbf{B} attraverso S deve essere nullo. Possiamo cioè scrivere che:

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da = 0 \quad (8.94)$$

e affermare che *il campo magnetico è un campo vettoriale solenoidale*. Questa affermazione potrebbe essere contraddetta solo qualora fosse possibile isolare delle cariche magnetiche libere, cosa che fino ad ora non è avvenuta nonostante i tentativi fatti da numerosi ricercatori. Utilizzando nella (8.94) il teorema della divergenza otteniamo che:

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (8.95)$$

valida in ogni punto dello spazio.

Applicando l'operatore divergenza alla relazione (8.55) è possibile verificare con un calcolo diretto che:

$$\text{div} \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \, dv' \right] = 0. \quad (8.96)$$

La proprietà (8.95) è cioè sempre soddisfatta qualunque siano le distribuzioni di corrente che generano il campo \mathbf{B} .

Le due relazioni $\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ e $\text{div } \mathbf{B} = 0$ permettono di definire in maniera completa il vettore induzione magnetica nel caso di campi magnetici generati nel vuoto da generiche distribuzioni di correnti.

8.13 Potenziale vettore magnetico

Nella trattazione del campo magnetico è possibile introdurre, accanto al potenziale scalare, funzione del punto a più valori, anche un potenziale vettore, funzione ad un solo valore. Tale potenziale rappresenta uno strumento estremamente

valido nella descrizione delle proprietà fondamentali dell'elettromagnetismo. Infatti dalla relazione (8.95) discende, per un noto teorema di calcolo vettoriale, l'esistenza di un vettore \mathbf{A} tale che:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (8.97)$$

Il vettore \mathbf{A} prende il nome di *potenziale vettore magnetico*. Si noti che la (8.97) non è sufficiente per definire completamente il vettore \mathbf{A} ; si può vedere infatti che aggiungendo ad \mathbf{A} il gradiente di una qualsiasi funzione scalare ψ si ottiene ancora:

$$\text{rot } (\mathbf{A} + \text{grad } \psi) = \text{rot } \mathbf{A} . \quad (8.98)$$

È necessaria allora una ulteriore condizione per \mathbf{A} . Assumeremo che nel caso della magnetostatica, cioè in assenza di campi magnetici variabili col tempo, essa sia la seguente:

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 . \quad (8.99)$$

È interessante poter disporre di una espressione che leghi il potenziale vettore \mathbf{A} alle correnti, o densità di correnti, che sono responsabili dell'esistenza del campo magnetico. A tal fine prendiamo in esame la relazione:

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (8.100)$$

sostituiamo a \mathbf{B} la (8.97) ed eseguiamo il rotore del rotore ricordando che $\text{div } \mathbf{A} = 0$. Abbiamo così che:

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (8.101)$$

Se confrontiamo questa equazione con quella di Poisson (3.5) valida in elettrostatica, notiamo che esse sono formalmente identiche eccetto per il fatto che nella (8.101) compaiono grandezze vettoriali anziché scalari. Ciò non costituisce una difficoltà perché sappiamo che ciascuna delle componenti di \mathbf{A} deve soddisfare separatamente l'equazione (8.101). Siamo così in grado di scrivere per ogni componente di \mathbf{A} una soluzione del tipo della (3.6), per cui, combinandole in forma vettoriale, troviamo in definitiva che:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' . \quad (8.102)$$

8.14 Potenziale vettore magnetico generato da una spira percorsa da corrente

La determinazione mediante la (8.102) del potenziale vettore magnetico \mathbf{A} presenta in generale maggiori difficoltà di quelle che si incontrano nel calcolo

del potenziale scalare φ_m e per questo motivo ci limiteremo al semplice calcolo del potenziale \mathbf{A} generato da una spira percorsa da corrente. Sia data una spira circolare di raggio r' percorsa da una corrente stazionaria I . Assumiamo una terna di assi cartesiani con l'asse z perpendicolare al piano contenente la spira, come mostrato in Fig. 8.21, e con l'origine delle coordinate coincidente con il centro della spira.

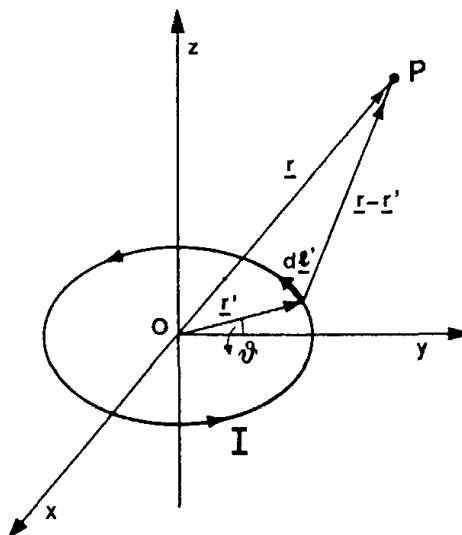


FIG. 8.21 - Calcolo del potenziale vettore magnetico nel caso di una spira circolare.

Poiché $\mathbf{J} \, dv' = I \, d\mathbf{l}'$, dove $d\mathbf{l}'$ rappresenta un elemento infinitesimo della spira, la (8.102) diviene:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{I \mu_0}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (8.103)$$

l'integrale essendo esteso a tutta la spira. Consideriamo il punto P , distante \mathbf{r} dall'origine O , caratterizzato dalle coordinate x, y, z . Dato che la spira giace nel piano $z = 0$, la componente del potenziale vettore lungo l'asse z , A_z , è nulla.

La quantità $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ può essere scritta nella forma:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} &= [(x - r' \sin \vartheta)^2 + (y - r' \cos \vartheta)^2 + z^2]^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{r} \left[1 - \frac{2x r'}{r^2} \sin \vartheta - \frac{2y r'}{r^2} \cos \vartheta + \frac{r'^2}{r^2} \right]^{-1/2} \end{aligned} \quad (8.104)$$

dove ϑ rappresenta l'angolo formato tra il vettore \mathbf{r}' e l'asse y .

Se prendiamo in esame un punto $P(x, y, z)$ posto ad una distanza dall'origine molto maggiore delle dimensioni della spira, tale cioè che $r \gg r'$, possiamo sviluppare la (8.104) in serie di potenze di r'/r ed ottenere, limitandoci ai termini del primo ordine:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{r' y \cos \vartheta + r' x \sin \vartheta}{r^2} + \dots \right]. \quad (8.105)$$

Sostituendo la (8.105) nella (8.103) e tenendo conto che:

$$d\mathbf{l}' = - (r' d\vartheta \cos \vartheta \mathbf{i} + r' d\vartheta \sin \vartheta \mathbf{j}) \quad (8.106)$$

le componenti lungo l'asse x e l'asse y del potenziale vettore A risultano essere :

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{I \mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} -r' d\vartheta \cos \vartheta \left(\frac{1}{r} + \frac{r' y \cos \vartheta + r' x \sin \vartheta}{r^3} \right) = -\frac{I \mu_0}{4\pi} \left(\frac{r'^2 \pi y}{r^3} \right) \\ A_y &= \frac{I \mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} -r' d\vartheta \sin \vartheta \left(\frac{1}{r} + \frac{r' y \cos \vartheta + r' x \sin \vartheta}{r^3} \right) = \frac{I \mu_0}{4\pi} \left(\frac{r'^2 \pi x}{r^3} \right) \end{aligned} \quad (8.107)$$

Date le espressioni (8.107) unitamente al fatto che $A_z = 0$, la forma vettoriale di A risulta allora essere:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (8.108)$$

dove $\mathbf{m} = (\pi r'^2) I \mathbf{n}$ rappresenta il momento magnetico della spira secondo la definizione (8.21) essendo $(\pi r'^2)$ la superficie S delimitata dalla spira ed \mathbf{n} un versore orientato parallelamente all'asse z di Fig. 8.21.

9

Magnetostatica nei mezzi materiali

9.1 Introduzione

Nel capitolo precedente abbiamo discusso i fenomeni magnetici dovuti a correnti stazionarie circolanti in fili conduttori posti nel vuoto e abbiamo dedotto le relazioni fondamentali che permettono di determinare in ogni punto dello spazio il campo magnetico generato da tali correnti. In questo capitolo indagheremo invece su quanto avviene quando i fili percorsi da corrente stazionaria si trovino in presenza di mezzi materiali. L'esperienza insegna che quando certi materiali vengono posti in un campo magnetico essi acquistano delle proprietà che in generale prima non possedevano e che a loro volta tali materiali, così modificati, sono in grado di influenzare il campo magnetico esterno : i materiali che presentano tale comportamento sono detti *magnetizzati*. Ci proponiamo di sviluppare in questo capitolo una teoria macroscopica dei materiali magnetizzati, seguendo una linea del tutto simile a quella utilizzata nel caso della discussione dei materiali polarizzati elettricamente, al fine di ricavare delle espressioni che siano in grado di fornire il valore del campo magnetico in ogni punto dello spazio in presenza e di correnti stazionarie e di materiali magnetizzati.

9.2 Correnti atomiche e vettore di magnetizzazione

Uno dei risultati più interessanti a cui siamo arrivati discutendo la magnetostatica nel vuoto è la dimostrazione che una piccola spira percorsa da corrente è caratterizzabile mediante un momento magnetico e che per quanto riguarda i

fenomeni magnetici ad essa connessi è del tutto equivalente ad un piccolo ago di materiale magnetizzato avente un uguale momento magnetico. Furono constatazioni di questo genere che diedero ad Ampère già nel secolo scorso lo spunto per la soluzione del problema del magnetismo prodotto da mezzi materiali.

Egli infatti avanzò l'ipotesi che l'origine di ogni specie di magnetismo nella materia fosse da ricondursi a piccole correnti circolanti in essa e associate agli atomi dei materiali. L'interpretazione moderna del magnetismo nella materia rimane essenzialmente quella di Ampère. Oggi sappiamo infatti che ogni atomo contiene degli elettroni che percorrono delle orbite intorno al nucleo in maniera simile a quanto avviene in un sistema planetario. Se pensiamo di rappresentare la carica dell'elettrone, invece che concentrata in una particella, distribuita lungo tutta l'orbita (il che è giustificato dal modello di atomo fornito dall'odierna teoria quantistica) possiamo riguardare il moto orbitale dell'elettrone come una piccola spira di dimensioni atomiche percorsa da un'opportuna corrente stazionaria. Ciò determina l'esistenza di un momento magnetico (detto *orbitale*). A questo va aggiunto inoltre che l'elettrone possiede, come abbiamo visto nel paragrafo 6.2, oltre al momento magnetico orbitale un momento magnetico intrinseco, associato al suo spin, che in un modello intuitivo dell'elettrone stesso può essere pensato come dovuto a un suo moto di rotazione attorno al proprio asse. Anche il momento magnetico intrinseco è dunque, in ultima analisi, riconducibile a un microscopico anello di corrente.

Giungiamo così a riconoscere che ogni atomo di un materiale qualsiasi *contiene* delle correnti circolanti che generalmente vengono indicate con il nome di *correnti atomiche*.

Per quanto riguarda tutti gli effetti magnetici, ciascuna spira percorsa da corrente atomica può essere rappresentata mediante un momento di dipolo magnetico e pertanto il campo magnetico generato da un atomo in un punto posto a grande distanza rispetto alle dimensioni atomiche è in prima approssimazione quello dovuto ad un momento di dipolo magnetico, trascurando, come abbiamo fatto nel caso della polarizzazione elettrica, i termini associati a poli di ordine superiore.

Associando così ad ogni atomo un momento di dipolo magnetico \mathbf{m} possiamo definire un vettore macroscopico \mathbf{M} , detto *intensità di magnetizzazione*, o più semplicemente *magnetizzazione* del mezzo, dato da:

$$(9.1)$$

$$\mathbf{M} = \frac{\sum_i \mathbf{m}_i}{\Delta V}$$

dove la sommatoria è estesa a tutti i momenti di dipolo magnetico contenuti nel volume ΔV , con ΔV che tende macroscopicamente a zero. Questo significa, come abbiamo già avuto occasione di dire, che ΔV deve essere sufficientemente piccolo da ridursi su scala macroscopica praticamente a un punto e sufficientemente grande da contenere un numero tale di dipoli magnetici per cui abbia senso considerare una media statistica, in modo che la funzione $\mathbf{M}(x, y, z)$ non vari bruscamente passando da un punto all'altro ed il mezzo possa essere considerato come un continuo. Il vettore \mathbf{M} ha le dimensioni di un momento

magnetico per unità di volume e nel sistema MKS viene misurato in ampere/metro.

Nel caso in cui il materiale non sia soggetto ad un campo magnetico esterno non esiste alcun motivo per supporre che le correnti atomiche circolino tutte nello stesso verso e soprattutto che ruotino tutte intorno alla stessa direzione. In altre parole possiamo supporre che normalmente in un materiale, in assenza di campo magnetico, i singoli momenti di dipolo magnetico sono orientati in maniera del tutto casuale. Da questo consegue che la sommatoria vettoriale che compare nella (9.1) risulta in tal caso uguale a zero e che il vettore di magnetizzazione è pertanto nullo e nulli sono di conseguenza gli effetti magnetici. L'applicazione di un campo magnetico produce quella che abbiamo chiamata la *magnetizzazione* del mezzo e che rappresentiamo associando ad ogni elemento di volume un momento di dipolo magnetico che non è necessariamente uniforme in tutto il materiale e che generalmente è proporzionale al campo magnetico esterno.

Il momento magnetico per unità di volume sorge per effetto dell'azione del campo magnetico applicato che, tramite una coppia di forze, tende a disporre le spire elementari percorse dalle correnti atomiche in un piano perpendicolare alla sua direzione o in altri termini ad orientare i dipoli magnetici atomici parallelamente a se stesso. Secondo la (9.1) il valore di \mathbf{M} è allora uguale al prodotto del numero di dipoli magnetici, contenuti nell'unità di volume, per il valore del momento magnetico di ciascun dipolo.

Ci proponiamo in questo capitolo di ricavare l'espressione del campo magnetico prodotto da un materiale magnetizzato caratterizzato dalla quantità macroscopica \mathbf{M} , tralasciando ogni considerazione sulle cause della magnetizzazione e su come possa essere determinato da un punto di vista microscopico il valore del momento magnetico di ciascun atomo. Questo ultimo problema costituirà l'argomento del capitolo successivo.

9.3 Corrente di magnetizzazione

Un materiale magnetizzato, per quanto detto, può quindi essere riguardato o come un insieme di correnti atomiche o come un insieme di dipoli magnetici più o meno ordinati. Per quanto riguarda le correnti atomiche è possibile dimostrare che esse si combinano in scala macroscopica per dar luogo ad una corrente, detta di magnetizzazione.

Assumendo invece il secondo tipo di schematizzazione, quello dei dipoli magnetici, formalmente del tutto simile a quello utilizzato nella trattazione dei dielettrici polarizzati, siamo indotti a ritenere che sia possibile definire delle densità fittizie di cariche magnetiche mediante le quali giustificare gli effetti prodotti dai materiali magnetizzati. Questa supposizione non deve d'altra parte sorprendere perché già nel paragrafo 8.5 abbiamo mostrato come una spira percorsa da corrente possa essere sostituita in maniera equivalente da una lamina magnetica sulle cui faccie siano distribuite opportune densità superficiali di cariche magnetiche.

Ci troviamo così di fronte a due diverse possibili rappresentazioni atte ad

analizzare il comportamento di un materiale magnetizzato: la prima basata sul concetto di densità di cariche o poli magnetici e quindi sull'utilizzo del potenziale scalare per il calcolo del campo magnetico generato, la seconda basata invece sul concetto di densità di corrente di magnetizzazione e quindi sull'utilizzo del potenziale vettore magnetico. Come mostreremo, sia la densità di corrente di magnetizzazione sia la densità di poli magnetici sono descrivibili in termini dell'intensità di magnetizzazione \mathbf{M} e delle sue derivate. È nostra intenzione sviluppare dapprima la trattazione legata al concetto di corrente di magnetizzazione per poi passare a quella fondata sul concetto di polo magnetico.

Consideriamo un pezzo di materiale magnetico come costituito da un certo numero di spire elementari per unità di volume percorse tutte nello stesso verso e intorno alla stessa direzione individuata da \mathbf{M} , da correnti atomiche. Se l'intensità di magnetizzazione del materiale è uniforme, il numero di spire per unità di volume è allora costante e quindi all'interno del mezzo le correnti atomiche si annullano l'una con l'altra perché, in maniera simile a quanto è mostrato in Fig. 8.16, tratti prossimi di due spire adiacenti sono percorsi dalla stessa quantità di corrente in verso opposto. Sulle superficie del materiale, dove esiste una discontinuità, le correnti atomiche danno origine invece ad una densità di corrente che evidentemente ha un valore massimo sulle superficie parallele ad \mathbf{M} ed un valore nullo su quelle perpendicolari ad \mathbf{M} .

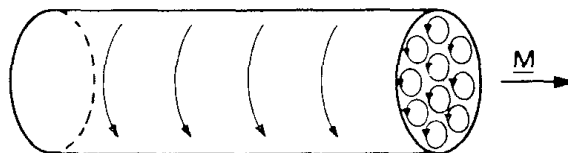


FIG. 9.1 - Cilindro di materiale uniformemente magnetizzato.

Un esempio che illustra un comportamento di questo genere è riportato in Fig. 9.1 dove è mostrato un cilindro di materiale uniformemente magnetizzato con l'asse parallelo alla direzione di \mathbf{M} . È facile constatare, considerando per esempio le spire disegnate su una base del cilindro, come le correnti atomiche, che circolano su piani perpendicolari all'asse del cilindro, essendo distribuite uniformemente si annullino ovunque completamente eccetto che sulla superficie cilindrica laterale, parallela ad \mathbf{M} , dove si compongono generando una corrente che si avvolge azimuthalmente.

Se la magnetizzazione \mathbf{M} del materiale non è uniforme l'annullamento delle correnti atomiche non è completo all'interno del corpo ed esiste, oltre alla corrente superficiale, anche una corrente macroscopica non nulla che fluisce nel mezzo. In Fig. 9.2 sono rappresentate le spire delle correnti atomiche situate su un piano interno ad un materiale non uniformemente magnetizzato. Se prendiamo in esame la zona compresa tra le due linee l_1 ed l_2 , notiamo che la quantità di carica che va dal basso verso l'alto è maggiore di quella che va in verso opposto e questo ci porta a concludere che, anche senza trasporto di cariche, esiste nel mezzo una corrente diretta verso l'alto: questa corrente unitamente a quelle

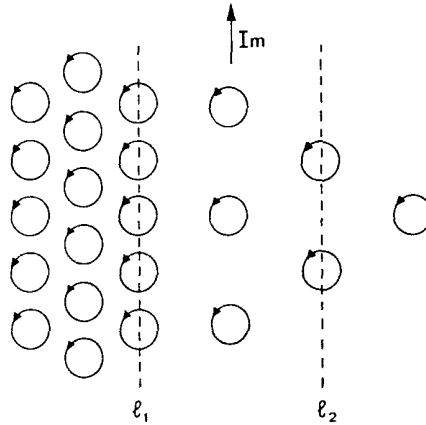


FIG. 9.2 - Correnti atomiche in un materiale magnetizzato non uniformemente.

superficiali formano quella che noi abbiamo chiamato la *corrente di magnetizzazione*.

Per mettere in relazione la corrente di magnetizzazione con l'intensità di magnetizzazione \mathbf{M} operiamo nella seguente maniera. Dato un materiale che supponiamo non uniformemente magnetizzato consideriamo al suo interno due parallelepipedi elementari di volume rispettivamente dV_1 e dV_2 entrambi di lati dx , dy , e dz e, come mostrato in Fig. 9.3 adiacenti lungo la direzione y .

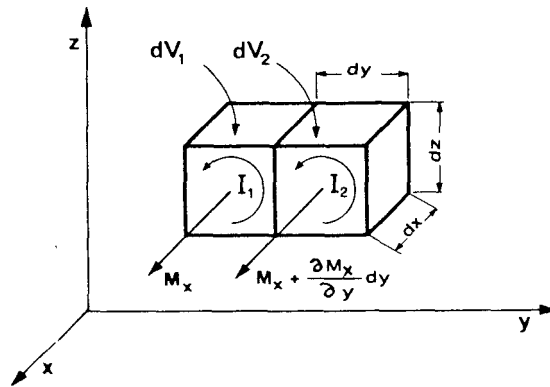


FIG. 9.3 - Elementi di volume di un materiale magnetizzato non uniformemente. Rappresentazione della magnetizzazione mediante correnti circolari.

Se al centro del volume dV_1 l'intensità di magnetizzazione è $M(x, y, z)$, al centro del volume dV_2 essa vale, a meno di infinitesimi di ordine superiore:

(9.2)

$$M(x, y, z) + \frac{\partial M(x, y, z)}{\partial y} dy.$$

Consideriamo la componente M_x del vettore magnetizzazione; possiamo associare al volumetto dV_1 un momento magnetico con una componente parallela all'asse x uguale a $M_x dx dy dz$ e immaginare che questa componente sia dovuta ad una corrente che si avvolge sul piano perpendicolare ad M_x in verso antiorario lungo una spira di superficie $dy dz$. Per il volume dV_1 , ricordando la relazione $m = IS$, questa corrente ha quindi una intensità :

$$I_1 = \frac{M_x dx dy dz}{dy dz} = M_x dx \quad (9.3)$$

e per il volume dV_2 una intensità:

$$\begin{aligned} I_2 &= \left(M_x + \frac{\partial M_x}{\partial y} dy \right) \frac{dx dy dz}{dy dz} \\ &= M_x dx + \frac{\partial M_x}{\partial y} dx dy. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Sulla superficie di separazione dei due volumetti in direzione z fluisce pertanto una corrente non nulla uguale a:

$$I'_{mz} = I_1 - I_2 = -\frac{\partial M_x}{\partial y} dx dy. \quad (9.5)$$

Se prendiamo in considerazione i due volumetti dV_1 e dV_2 ancora adiacenti ma questa volta lungo la direzione x , si può vedere che esiste un ulteriore contributo alla corrente lungo z e precisamente quello dovuto alla corrente che fluisce sul piano xz in una spira di superficie $dx dz$ intorno alla direzione della componente M_y del vettore magnetizzazione.

Ripetendo il calcolo precedente si troverebbe che questo contributo vale:

$$I''_{mz} = \frac{\partial M_y}{\partial x} dx dy \quad (9.6)$$

la corrente totale lungo z è quindi:

$$I_z = I'_{mz} + I''_{mz} = \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) dx dy. \quad (9.7)$$

Dividendo quest'ultima espressione per il valore dell'area elementare $dx dy$ perpendicolare alla direzione della corrente I_z si ottiene:

$$J_{mz} = \left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) \quad (9.8)$$

che rappresenta la componente lungo z della densità di corrente di

magnetizzazione.

Con lo stesso procedimento si possono ricavare anche le altre componenti della densità di corrente \mathbf{J}_m e riconoscere poi che ognuna di esse è uguale alla rispettiva componente del vettore $\mathbf{rot M}$. Si ha perciò:

$$\mathbf{J}_m = \mathbf{rot M}. \quad (9.9)$$

Segue immediatamente dalla (9.9) che se \mathbf{M} è uniforme \mathbf{J}_m è nulla nel materiale ma non sulla superficie, dove esiste una discontinuità per \mathbf{M} .

Per chiarire questo punto, riprendiamo in esame l'esempio di Fig. 9.1 supponendo che l'asse del cilindro sia diretto lungo z e che quindi $M_x = M_y = 0$ ed $M_z = M$. Dalla (9.9) si deduce che:

$$(9.10)$$

$$J_{mx} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$J_{my} = -\frac{\partial M}{\partial x}$$

$$J_{mz} = 0.$$

Se la magnetizzazione è uniforme, cioè se $M = \text{cost}$, nel materiale \mathbf{J}_m è nulla. Sulla superficie laterale del cilindro tuttavia la magnetizzazione M subisce una discontinuità passando dal valore M ad un valore nullo. Pertanto su questa superficie si avvolge una corrente che, come risulta dalla (9.10), è azimutale intorno alla direzione z come avevamo già dedotto con un ragionamento intuitivo.

Per ottenere l'espressione in funzione della magnetizzazione M di questa densità di corrente superficiale, che indicheremo con \mathbf{J}_{sm} , consideriamo la superficie di separazione tra materiale magnetizzato e vuoto di Fig. 9.4, supponendo

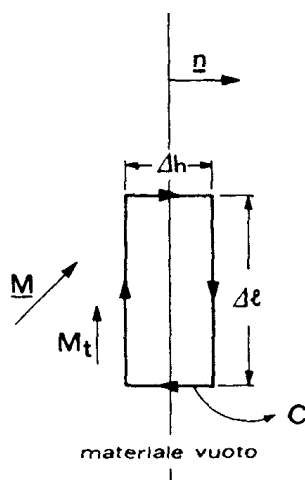


FIG. 9.4 - La densità di corrente superficiale di magnetizzazione è uguale alla componente M_t di M .

che sia il vettore \mathbf{M} sia la normale \mathbf{n} alla superficie giacciono nel piano del foglio. Dato allora il cammino chiuso C , calcoliamo il flusso di \mathbf{J}_m attraverso la superficie S da esso delimitato; per la (9.9) questo vale:

$$\Phi_S(\mathbf{J}_m) = \int_S \text{rot } \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} \, da . \quad (9.11)$$

L'integrale a destra può essere trasformato mediante il teorema di Stokes, e quindi:

$$\Phi_S(\mathbf{J}_m) = \oint_C \mathbf{M} \cdot d\mathbf{l} . \quad (9.12)$$

La circuitazione di \mathbf{M} , facendo tendere Δh a zero e supponendo \mathbf{M} uniforme su tutto il tratto Δl , è uguale a $M_t \Delta l$, mentre il flusso di \mathbf{J}_m , se la densità di corrente superficiale è \mathbf{J}_{sm} , risulta normale al piano del foglio e vale $J_{sm} \Delta l$. Abbiamo pertanto che:

$$J_{sm} = M_t \quad (9.13)$$

dove M_t indica la componente di \mathbf{M} tangente alla superficie di separazione tra il materiale e il vuoto. In forma vettoriale, indicando \mathbf{n} il vettore normale alla superficie di separazione, la (9.13) si scrive:

$$\mathbf{J}_{sm} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}. \quad (9.14)$$

La quantità \mathbf{J}_{sm} ha le dimensioni di una corrente per unità di lunghezza.

9.4 Campo magnetico generato da un materiale magnetizzato. Rappresentazione mediante correnti di magnetizzazione

Per quanto mostrato nel paragrafo 8.13 il vettore induzione magnetica \mathbf{B} si ottiene eseguendo il rotore del potenziale vettore magnetico \mathbf{A} . Nel caso di una spira percorsa da corrente di momento magnetico \mathbf{m} il potenziale vettore generato in un punto \mathbf{r} posto a grande distanza è:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} . \quad (9.15)$$

Poiché ad ogni elemento di volume di un materiale magnetizzato con intensità \mathbf{M} possiamo attribuire un momento magnetico:

$$\Delta \mathbf{m} = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \Delta v' \quad (9.16)$$

dove con \mathbf{r}' indichiamo il raggio vettore, spiccato dall'origine delle coordinate, che individua il volumetto infinitesimo $\Delta v'$, abbiamo che il potenziale vettore

A generato in un punto \mathbf{r} da un materiale magnetizzato di volume V è:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' . \quad (9.17)$$

Il vettore \mathbf{B} può essere ottenuto applicando l'operatore rotore alla (9.17).

Ricordando che \mathbf{grad}' opera sulle coordinate (x', y', z') , la (9.17) diviene:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \mathbf{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dv' . \quad (9.18)$$

Utilizzando la seguente relazione vettoriale, riportata in tabella 1.1, $\mathbf{rot}' \varphi \mathbf{M} =$

$$= \varphi \mathbf{rot}' \mathbf{M} - \mathbf{M} \times \mathbf{grad}' \varphi \quad \text{con } \varphi = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad \text{con si ha, sostituendo nella (9.18),}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{rot}' \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \mathbf{rot}' \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dv' . \quad (9.19)$$

Il secondo integrale a destra può essere trasformato in un integrale superficiale mediante relazioni del tipo (1.41), ottenendo in tal modo:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{rot}' \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{M} \times \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' . \quad (9.20)$$

Tenendo conto della (9.9) e della (9.14) abbiamo infine che:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}_m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{J}_{sm}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' . \quad (9.21)$$

Quest'ultima espressione, valida per tutti i punti dello spazio interni ed esterni del materiale, mostra come il potenziale vettore magnetico generato da correnti di magnetizzazione abbia la stessa forma di quello creato da correnti di conduzione. Il problema di determinare l'espressione della induzione magnetica \mathbf{B} dovuta ad un volume di materiale magnetizzato si risolve completamente eseguendo il rotore della (9.21). Tuttavia, per la complessità del calcolo del rotore di \mathbf{A} , preferiamo non procedere oltre su questa linea e riprendere l'argomento più avanti, dove sarà affrontato utilizzando il concetto di poli magnetici.

9.5 Il vettore \mathbf{H} . La legge della circuitazione di Ampère in presenza dei materiali magnetizzati

Nel paragrafo 8.11 abbiamo dedotto la forma differenziale della legge di circuitazione di Ampère : $\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$. Alla luce dei risultati del paragrafo precedente possiamo affermare che nel caso in cui il campo magnetico sia generato oltre che da correnti che fluiscono in fili conduttori anche da materiali magnetizzati, nell'equazione del rotore di \mathbf{B} , dobbiamo considerare oltre alla densità di corrente di conduzione \mathbf{J} anche la densità di corrente di magnetizzazione \mathbf{J}_m , e scrivere:

$$\mathbf{rot} \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \mathbf{J}_m). \quad (9.22)$$

Poiché inoltre $\mathbf{J}_m = \mathbf{rot} \mathbf{M}$ possiamo trasformare la (9.22) nella seguente maniera:

$$\mathbf{rot} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}. \quad (9.23)$$

Introducendo un nuovo vettore \mathbf{H} , detto vettore *intensità magnetica*, definito come:

$$\mathbf{H} = \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \quad (9.24)$$

abbiamo che:

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (9.25)$$

Nel *vuoto*, dove il vettore magnetizzazione \mathbf{M} è ovviamente nullo, la (9.24) si riduce alla relazione $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ che esprime una semplice proporzionalità tra il vettore \mathbf{B} ed il vettore \mathbf{H} . Pertanto tutte le leggi della magnetostatica nel vuoto ricavate nel capitolo 8 per il vettore \mathbf{B} , valgono anche per il vettore \mathbf{H} .

Calcolando il flusso di $\mathbf{rot} \mathbf{H}$ attraverso una superficie S aperta, di contorno C , per la (9.25) si ottiene:

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da.$$

Applicando il teorema di Stokes all'integrale a sinistra, si ha:

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (9.26)$$

espressione che rappresenta la forma integrale del teorema della circuitazione di Ampère nel caso in cui siano presenti oltre che correnti di conduzione anche materiali magnetizzanti.

La ragione della comparsa del nuovo vettore **H** nella trattazione del magnetismo dei mezzi materiali è analoga a quella che in elettrostatica aveva portato, al termine della discussione del teorema di Gauss in presenza di dielettrici polarizzati, ad introdurre il vettore **D**. In realtà, come abbiamo visto, per la descrizione del magnetismo dei materiali sono sufficienti i due vettori **B** ed **M**; inoltre **H**, come appare chiaramente dalla (9.24) non è un vettore indipendente. L'importanza tuttavia di questo vettore ausiliario è legata proprio alle espressioni (9.25) e (9.26) e cioè al fatto che il suo rotore o la sua circuitazione dipendono esclusivamente dalle correnti di conduzione senza esplicito riferimento alle correnti di magnetizzazione.

La (9.25) e la (9.26) divengono così le espressioni più generali della legge di Ampère, rispettivamente in forma differenziale ed integrale, valide sia nel vuoto sia in presenza di materiali magnetizzati.

Il vettore **H** ha le stesse dimensioni del vettore **M** e cioè quelle di un momento magnetico per unità di volume. Nel sistema MKS, come può ricavarsi anche dalla espressione (9.26), l'unità di misura di **H** è l'ampere per metro.

9.6 Le equazioni del campo. Le condizioni al contorno di **B** ed **H**

Nel corso dell'esposizione delle principali proprietà che caratterizzano il campo magnetostatico abbiamo avuto occasione di mostrare che il vettore **B** generato nel vuoto da correnti di conduzione è un vettore solenoidale, cioè che :

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 . \quad (9.27)$$

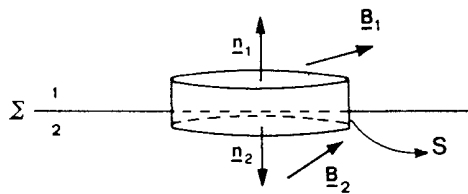
Per quanto detto nel paragrafo 9.4, sappiamo d'altra parte che il campo magnetico prodotto da materiali magnetizzati è deducibile schematizzando questi ultimi mediante opportune distribuzioni di densità di corrente. Essendo pertanto in ogni caso sorgenti del campo vettoriale **B** le correnti, o di conduzione o di magnetizzazione, è lecito affermare che la (9.27) deve essere valida dovunque, e quindi anche all'interno dei mezzi materiali.

Se teniamo conto inoltre dell'espressione a cui siamo giunti per il teorema della circuitazione di Ampère in presenza di mezzi magnetizzati, possiamo concludere che le equazioni fondamentali della magnetostatica, valide nel vuoto e nella materia, sono la (9.27) e

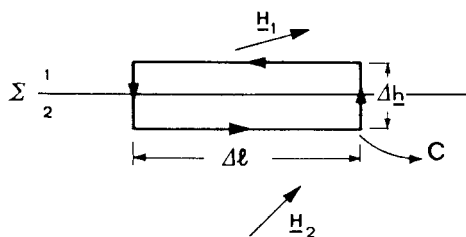
$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (9.28)$$

a cui deve aggiungersi naturalmente la relazione *strutturale* che lega i tre vettori **B**, **H** ed **M**. Vedremo tuttavia nel seguito che questa ultima relazione sarà sostituita, per poter pervenire alla soluzione del problema della magnetostatica, da una legge fenomenologica che, come nel caso dell'elettrostatica per **E** e **D**, permette di associare direttamente il vettore **B** al vettore **H**.

Consideriamo ora due mezzi diversi separati da una superficie Σ ed un cilindro elementare di superficie S intersecato da Σ come mostrato in Fig. 9.5a). Calcoliamo l'integrale di volume del vettore $\operatorname{div} \mathbf{B}$ sul volume V racchiuso



a)



b)

FIG. 9.5 - a) e b) Calcolo delle condizioni al contorno di \mathbf{B} ed \mathbf{H} sulla superficie di separazione E .

dalla superficie S . Per la (9.27) ed il teorema della divergenza possiamo scrivere:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{B} \, dv = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, da = 0.$$

(9.29)

Facendo tendere a zero l'altezza del cilindro in modo da limitare il calcolo ai soli contributi del flusso attraverso le due basi, sulle quali assumiamo il vettore \mathbf{B} uniforme, otteniamo:

$$B_{1n} = B_{2n} \quad (9.30)$$

dove B_{1n} e B_{2n} sono le componenti normali del vettore \mathbf{B} alla superficie di separazione in punti molto prossimi a Σ rispettivamente nel primo e nel secondo mezzo. Dalla (9.30) risulta pertanto che attraverso la superficie di separazione tra due mezzi differenti la componente normale alla superficie del vettore \mathbf{B} è continua.

Dato il circuito elementare C di Fig. 9.5b) calcoliamo il flusso del vettore $\operatorname{rot} \mathbf{H}$ attraverso la superficie S delimitata da C . Per la (9.28) abbiamo:

$$\int_s \mathbf{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_s \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (9.31)$$

che mediante il teorema di Stokes applicato all'integrale a sinistra diviene:

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, da . \quad (9.32)$$

Facendo tendere a zero l'altezza Δh di C e considerando \mathbf{H} uniforme sui tratti infinitesimi Al , la (9.32) fornisce immediatamente il risultato:

$$H_{1t} - H_{2t} = J_s \quad (9.33)$$

dove H_{1t} e H_{2t} rappresentano le componenti di \mathbf{H} tangenti alla superficie I in punti prossimi alla superficie stessa rispettivamente nel primo e nel secondo mezzo, e J_s indica una densità di corrente di conduzione superficiale, cioè una corrente di conduzione per unità di lunghezza sulla superficie Z , diretta normalmente rispetto al piano in cui è contenuto il cammino C . Nel caso in cui la corrente superficiale fosse nulla:

$$H_{1t} = H_{2t} \quad (9.34)$$

e quindi la componente tangenziale del vettore \mathbf{H} risulta continua attraverso la superficie di separazione dei due mezzi.

9.7 Campo magnetico esterno ad un materiale magnetizzato. Rappresentazione mediante poli magnetici

Una spira percorsa da corrente avente momento magnetico \mathbf{m} genera in un punto a grande distanza rispetto alle sue dimensioni lineari un campo magnetico $\mathbf{B} = -U_0 \mathbf{grad} \varphi_m$ con φ_m potenziale scalare magnetico dato da :

$$\varphi_m = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{4\pi r^3}. \quad (9.35)$$

Dato un materiale magnetizzato caratterizzato da una magnetizzazione \mathbf{M} possiamo associare ad ogni suo volumetto dv' un momento magnetico $d\mathbf{m} = \mathbf{M} dv'$. Il potenziale scalare magnetico generato dal volumetto dv' di coordinata \mathbf{r}' in un punto esterno distante \mathbf{r} dall'origine delle coordinate è allora:

(
per cui il potenziale
da tutto il volume V

$$d\varphi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \quad \text{generato nel punto } \mathbf{r} \text{ del materiale risulta:}$$

(9.36)

e

$$\varphi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'. \quad \text{Poichè valendo inoltre la}$$

$\mathbf{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ relazione:

$$\text{div}(\psi \mathbf{M}) = \psi \text{div} \mathbf{M} + \mathbf{M} \times \mathbf{grad} \psi \quad (9.37)$$

ponendo $\psi = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$, possiamo scrivere che :

$$(9.38) \quad \frac{\mathbf{r}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \left| \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{grad}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right| = \text{div}' \left| \frac{\mathbf{r}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right| - \frac{\text{div}' \mathbf{r}' \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}.$$

Per la (9.38), la (9.36) diviene:

$$(9.39) \quad \varphi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \text{div}' \left[\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] dv' - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\text{div}' \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

Applicando il teorema della divergenza al primo integrale a destra si ottiene :

$$(9.40) \quad \varphi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\text{div}' \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'.$$

Definiamo ora le due quantità scalari:

$$(9.41) \quad \rho_m(\mathbf{r}') = -\text{div}' \mathbf{M}(\mathbf{r}')$$

detta *densità volumetrica di polo magnetico*, e

$$(9.42) \quad \sigma_m(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}$$

detta *densità superficiale di polo magnetico*.

La ρ_m e la σ_m , consistenti in distribuzioni fittizie di cariche o poli magnetici distribuiti sulla superficie e nei volumi dei materiali magnetizzati, si rivelano quantità molto utili nella impostazione e risoluzione dei problemi di magnetostatica che coinvolgono mezzi magnetizzati. Esse svolgono nell'ambito del magnetismo lo stesso ruolo che le densità di cariche di polarizzazione σ_p e ρ_p rivestono nella teoria dei dielettrici e permettono di affrontare i problemi di magnetostatica utilizzando la stessa metodologia dell'elettrostatica.

Avevamo già mostrato nel paragrafo 8.5, parlando delle lamine, che una spirale percorsa da corrente, relativamente agli effetti magnetici, può essere considerata simile a due distribuzioni superficiali di poli magnetici di modulo uguale ma di segno opposto separate da un piccolo spessore δ : abbiamo ora dimostrato che il campo magnetico generato da un corpo magnetizzato può essere descritto come prodotto da una distribuzione superficiale e da una distribuzione volumetrica di poli magnetici.

Se il materiale è uniformemente magnetizzato, cioè se $\text{div } \mathbf{M} = 0$, la densità volumetrica ρ_m è nulla, ed è presente solamente una densità σ_m su quelle superfici per le quali esiste una componente normale di \mathbf{M} non nulla. Queste sono le superfici che in una comune calamita a forma di barretta o di ferro di cavallo vengono comunemente indicate con il nome di *poli*: le distribuzioni superficiali di cariche magnetiche positive individuano il cosiddetto polo nord, le distribuzioni superficiali di cariche magnetiche negative il polo sud.

L'intensità totale dei poli magnetici distribuiti nel volume e sulla superficie di un mezzo magnetizzato è evidentemente nulla. Si ha infatti:

$$\int_S \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} \, da + \int_V (-\operatorname{div} \mathbf{M}) \, dv' = 0$$

(9.43)

come è facile dimostrare applicando al primo integrale il teorema della divergenza.

Il campo \mathbf{B} generato da un materiale magnetizzato di volume V e superficie S è pertanto dato da:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \operatorname{grad} \varphi_m \quad (9.44)$$

con:

$$\varphi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\sigma_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, da' + \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \, dv'$$

(9.45)

Risulta così evidente l'utilità della rappresentazione mediante poli magnetici, che permette di utilizzare in problemi di magnetostatica il formalismo della elettrostatica, data la maggiore semplicità connessa con il calcolo del gradiente di un potenziale scalare rispetto al calcolo del rotore di un potenziale vettore necessario nella rappresentazione mediante correnti di magnetizzazione.

Dalla (9.44) ricaviamo inoltre, trattandosi di un punto esterno al materiale, dove vale la relazione $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, che

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad} \varphi_m \quad (9.46)$$

9.8 Campo magnetico interno ad un materiale magnetizzato

Per quanto riguarda la descrizione del campo magnetico macroscopico all'interno della materia valgono naturalmente, da un punto di vista generale, le considerazioni fatte nella trattazione del campo elettrostatico nei dielettrici.

L'induzione magnetica che in tal modo si definisce coincide con il valor medio del campo che si dedurrebbe considerando la deviazione prodotta dalla forza di Lorentz $q(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ sul cammino di una particella di carica q che attraversa ad alta velocità il materiale magnetizzato.

Prima tuttavia di procedere alla determinazione di \mathbf{B} all'interno di un mezzo magnetizzato, visto che per semplicità di calcolo abbiamo deciso di far ricorso alla trattazione della magnetizzazione mediante poli magnetici, vogliamo ancora una volta sottolineare come tale rappresentazione non sia che un utile artificio, e che questo, in quanto tale, va applicato con molta cautela. A titolo di esempio ricordiamo che le linee di forza \mathbf{B} sono linee chiuse o che si estendono all'infinito mentre la presenza di poli o cariche magnetiche comporta l'esistenza di linee di forza che iniziano e terminano in punti ben determinati. Per completare pertanto l'analogia con la trattazione del campo elettrostatico nella materia

utilizzeremo il vettore ausiliario \mathbf{H} per il quale è possibile mostrare che nel materiale magnetizzato i poli magnetici rappresentano le sorgenti del campo. Se infatti calcoliamo la divergenza della (9.24) otteniamo:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right)$$

essendo $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ e $-\operatorname{div} \mathbf{M} = \rho_m$, si ha :

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \rho_m \quad (9.47)$$

relazione del tutto analoga a quella valida per il campo induzione elettrostatica \mathbf{D} . Allo scopo di determinare il valore del campo magnetico nella materia, in maniera simile a quanto fatto per il campo elettrostatico, consideriamo una sottile cavità cilindrica scavata in un materiale magnetizzato, omogeneo lineare e isotropo, con l'asse parallelo alla direzione del vettore magnetizzazione \mathbf{M} , come illustrato in Fig. 9.6. L'interno della cavità è una regione vuota nella quale in linea di principio è sempre possibile realizzare una esperienza per ricavare l'intensità del campo magnetico, misurando per esempio la coppia che agisce su una spira elementare percorsa da corrente o su un aghetto magnetico oppure la forza di Lorentz che agisce su una carica in moto.

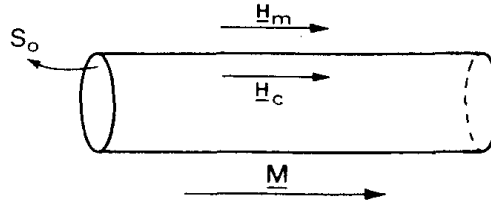


FIG. 9.6 - Cavità cilindrica all'interno di un materiale magnetizzato.

In punti prossimi alla superficie laterale della cavità cilindrica e situati da parti opposte rispetto a questa, per le componenti tangenziali di \mathbf{H} vale la relazione (9.34). Poiché inoltre si è scelto l'asse della cavità parallelo ad \mathbf{M} , il vettore \mathbf{H} nel materiale risulta tangente alla superficie laterale del cilindro e si ha perciò che:

$$\mathbf{H}_m = \mathbf{H}_c \quad (9.47 \text{ bis})$$

dove con \mathbf{H}_m ed \mathbf{H}_c indichiamo il vettore intensità magnetica nel materiale e nella cavità.

L'intensità magnetica \mathbf{H}_c nella cavità può essere calcolata mediante la (9.46) prendendo per il potenziale φ_m l'espressione (9.45). Bisogna tuttavia tener presente che gli integrali che compaiono nella (9.45) sono estesi al volume totale V del materiale e alla sua superficie S esterna, mentre per il calcolo di

\mathbf{H}_c nella cavità bisognerebbe tener conto del fatto che il materiale magnetizzato contenuto all'interno di S_0 è stato rimosso e che sulle basi della cavità cilindrica appaiono delle densità superficiali di cariche magnetiche $\pm \sigma_m$ che non erano considerate nell'integrale superficiale della (9.45). D'altra parte, se supponiamo che la cavità cilindrica sia molto sottile, con un volume che al limite tende a zero, possiamo assumere che il vettore \mathbf{H}_c nella cavità sia dato da:

$$\mathbf{H}_c = -\text{grad } \varphi_m \quad (9.48)$$

con φ_m esattamente uguale a quello dell'espressione (9.45) e cioè in altre parole con gli integrali estesi al volume e alla superficie del materiale magnetizzato.

Possiamo così affermare che il vettore intensità magnetica \mathbf{H} in un punto interno al materiale è deducibile dalla stessa espressione valida per il calcolo di \mathbf{H} in un punto esterno.

Per la relazione (9.24) abbiamo poi che nel materiale deve essere:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (9.49)$$

che combinata con la (9.47 bis) fornisce:

$$\mathbf{H}_c = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (9.50)$$

Da questa ultima espressione deduciamo che nel materiale il vettore induzione magnetica vale:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H}_c + \mathbf{M}) \quad (9.51)$$

che per la (9.48) diviene:

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \text{grad } \varphi_m + \mu_0 \mathbf{M} \quad (9.52)$$

con:

$$\varphi_m = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\sigma_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} da' + \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (9.53)$$

dove, come detto, gli integrali vanno estesi al volume V e alla superficie S del materiale magnetizzato.

L'espressione (9.52) fornisce pertanto il valore di \mathbf{B} generato da un materiale magnetizzato in ogni punto dello spazio, interno o esterno. Ovviamente all'esterno del materiale l'ultimo termine a destra è nullo essendo nel vuoto nullo il vettore \mathbf{M} .

Nel caso in cui, oltre al materiale magnetizzato, si prendano in considerazione come sorgenti del campo anche le densità di correnti di conduzione \mathbf{J} ,

l'induzione magnetica \mathbf{B} , tenendo conto della (8.55), è data da:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' - \mu_0 \mathbf{grad} \varphi_m + \mu_0 \mathbf{M} \quad (9.54)$$

che rappresenta pertanto l'espressione più generale per il vettore \mathbf{B} .

9.9 La suscettività e la permeabilità magnetica

L'equazione (9.54) ci permette di risalire al valore di \mathbf{B} in ogni punto dello spazio una volta noti, oltre le correnti che fluiscono nei conduttori, il potenziale scalare φ_m e quindi le densità di polo magnetico σ_m e ρ_m . Dato che σ_m e ρ_m , per quanto dimostrato precedentemente, sono funzioni di \mathbf{M} , il problema del calcolo di \mathbf{B} è risolto, quando si è in presenza di materiali magnetizzati, se è nota la magnetizzazione \mathbf{M} . D'altra parte la intensità di magnetizzazione \mathbf{M} dipende e dalla natura del materiale e dal valore del campo magnetico totale applicato che a sua volta comprende il contributo dovuto al materiale magnetizzato. Il problema posto in questi termini è evidentemente senza soluzione in quanto non conoscendo il campo magnetico totale non siamo in grado di determinare il valore della magnetizzazione e viceversa.

Risulta perciò necessario introdurre nella nostra trattazione una relazione sperimentale che legghi il vettore \mathbf{B} al vettore \mathbf{H} o, in modo equivalente, una relazione tra il vettore \mathbf{M} ed uno dei due vettori del campo magnetico.

Misure sperimentali atte a determinare il comportamento magnetico dei mezzi materiali mostrano che questi possono essere divisi in due categorie. Una comprendente i materiali cosiddetti *diamagnetici* e *paramagnetici* che presentano una debole magnetizzazione ed un comportamento lineare per cui \mathbf{B} , \mathbf{H} ed \mathbf{M} risultano fra loro proporzionali, ed una comprendente i cosiddetti materiali *ferromagnetici* che presentano una forte magnetizzazione ed un comportamento decisamente non lineare. Questa ultima categoria sarà trattata a parte nel prossimo paragrafo.

Normalmente per i materiali lineari si introduce la legge sperimentale:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (9.55)$$

dove χ_m è una quantità adimensionale che prende il nome di *suscettività magnetica*. La (9.55) vale per tutti i materiali lineari isotropi mentre nel caso di materiali lineari anisotropi essa viene sostituita da una relazione tensoriale in cui la suscettività è rappresentata da una matrice a tre righe e tre colonne. Riprendendo allora la relazione:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (9.56)$$

e sostituendo in essa l'espressione di \mathbf{M} data dalla (9.55) otteniamo:

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H}. \quad (9.57)$$

Ponendo poi:

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) = \mu_0 \mu_r \quad (9.58)$$

con

$$\mu_r = (1 + \chi_m) = \mu / \mu_0 \quad (9.59)$$

la (9.57) si può scrivere:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (9.60)$$

La quantità μ prende il nome di *permeabilità magnetica assoluta* mentre la quantità adimensionale μ_r viene chiamata *permeabilità magnetica relativa*. Entrambe sono caratteristiche di un determinato materiale. La relazione (9.60) vale per i materiali lineari isotropi omogenei; per i materiali disomogenei μ è uno scalare funzione del punto, mentre per i materiali anisotropi μ diviene un tensore del secondo ordine. In assenza di un mezzo materiale, cioè nel vuoto, la (9.60) si riduce alla relazione da noi già introdotta:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (9.61)$$

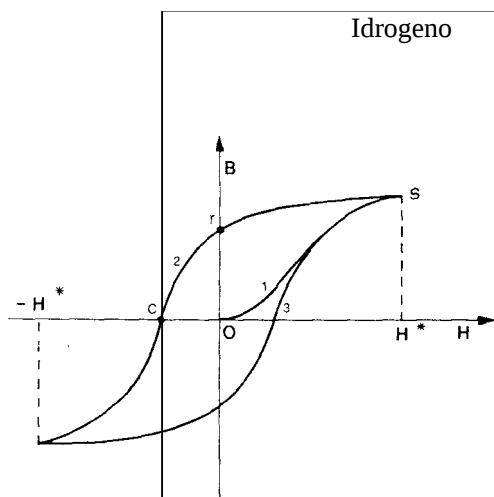
La suscettività magnetica χ_m è una quantità negativa per i materiali diamagnetici e positiva per quelli paramagnetici; tuttavia per entrambi i tipi di materiale

Tabella 9.1. Suscettività magnetica di alcuni materiali diamagnetici e paramagnetici alla temperatura di 0 °C ed alla pressione di 1 atmosfera.

$$\mathcal{E}_0 = \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} \approx \frac{w_0}{c} \approx \frac{w_0}{c} = \beta \quad \left(\text{cioè } \mathbf{J}_s = \mu, m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \text{ e } \beta = v/c, v \right) \quad (14.45)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (14.46)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (14.47)$$



Idrogeno
(14.44)

(14.47)

-0,21 $\times 10^{-8}$ Argon - 0,95 $\times 10^{-8}$ Acqua - 0,88 $\times 10^{-8}$
 55 Rame - 0,94 $\times 10^{-8}$
 56 Quarzo - 1,5 $\times 10^{-8}$
 57 Diamante - 2,2 $\times 10^{-8}$
 58 Argento - 2,6 $\times 10^{-8}$
 59 Mercurio - 3,2 $\times 10^{-8}$ Oro - 3,6 $\times 10^{-8}$
 60 Bismuto - 1,7 $\times 10^{-4}$ Ossigeno - 17,9 $\times 10^{-4}$
 61 Magnesio - 1,2 $\times 10^{-4}$
 62 Alluminio - 2,3 $\times 10^{-4}$
 63 Tungsteno - 6,8 $\times 10^{-4}$
 64 Titanio - 7,0 $\times 10^{-4}$
 65 Platino - 2,9 $\times 10^{-4}$
 66 Palladio - 8,2 $\times 10^{-4}$ 58

MAGNETOSTATICA NEI
MEZZI MATERIALI
[CAP. 9]

il suo modulo è sempre molto minore dell'unità e pertanto la permeabilità magnetica relativa μ_r è assai prossima all'unità. All'interno dei materiali diamagnetici il campo magnetico risulta indebolito rispetto a quello che si avrebbe nel vuoto, nella stessa regione occupata dal mezzo; all'interno dei materiali paramagnetici al contrario il campo viene rafforzato; tuttavia, per il piccolo valore di χ_m , gli effetti magnetici dovuti a questi due tipi di materiale appaiono generalmente molto deboli.

9.10 Materiali ferromagnetici. Ciclo di isteresi

Le sostanze ferromagnetiche, a differenza di quanto avviene per quelle diamagnetiche e paramagnetiche, sono sostanze a comportamento non lineare e pertanto presentano una suscettività magnetica χ_m , e quindi una permeabilità magnetica μ , che dipende dalla intensità del campo magnetico applicato, cioè:

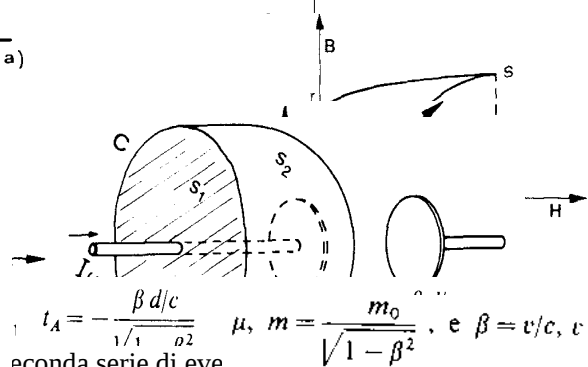
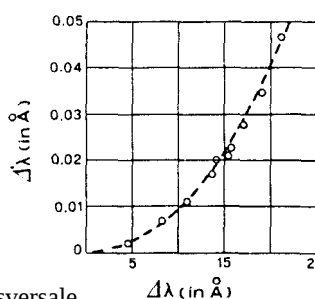
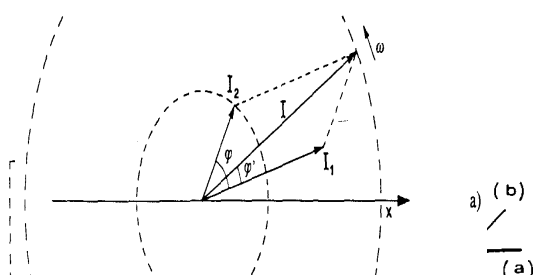


FIG. 15.9 - Effetto Doppler trasversale.

seconda serie di eve

$$\frac{\partial f_1(x-vt)}{\partial x} = f_1'(x-vt); \quad \frac{\partial^2 f_1(x-vt)}{\partial x^2} = f_1''(x-vt)$$

$$dV = \left(\tilde{R}I + \tilde{L} \frac{\partial I}{\partial t} \right) dz \quad \frac{f_1(x-vt)}{\partial t^2} = v^2 f_1''(x-vt) \quad \frac{1}{4}$$

$$t_A = \frac{\beta d/c}{1/\gamma - \alpha^2} \quad \mu, m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \text{ e } \beta = v/c, v$$

